

Contrôle continu 2

Tous les documents sont interdits, la calculatrice et le téléphone portable sont interdits et doivent rester dans votre sac. Chaque réponse devra être clairement justifiée pour être validée.

Durée de l'épreuve : 60 minutes

Exercice 1

Soient X_1 et X_2 des variables aléatoires indépendantes de loi normale centrée réduite. Soient a, b, c et d des nombres réels tels que $ad - bc \neq 0$. On pose $Y_1 = aX_1 + bX_2$ et $Y_2 = cX_1 + dX_2$.

1. (1 pt) Écrire l'expression de la densité du vecteur (X_1, X_2) .
2. (3 pts) Déterminer la loi du vecteur (Y_1, Y_2) .
3. (2 pts) Donner, en justifiant, une condition nécessaire et suffisante sur (a, b, c, d) pour que Y_1 soit indépendante de Y_2 .
4. (2 pts) Donner la loi de Y_1 .

Exercice 2

Soient X une variable aléatoire de loi uniforme sur $] -\theta, \theta[$, où $\theta > 0$ est un paramètre inconnu. Soient X_1, \dots, X_n des variables aléatoires indépendantes de même loi que X .

1. (3 pts) Calculer $\mathbb{E}[|X|]$ et en déduire, à l'aide de la méthode des moments, un estimateur de θ basé sur X_1, \dots, X_n .
2. (2 pts) Déterminer une statistique exhaustive pour θ .
3. (2 pts) Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance de θ .

Exercice 3

1. (1 pt) Donner l'expression de la densité d'une loi gamma de paramètres $\alpha > 0$ et $\lambda > 0$.
2. (2 pts) Déterminer une statistique exhaustive pour le couple (α, λ) .
3. (2 pts) Cette statistique exhaustive est-elle minimale?