LE COUP DU H^2

Soient X un groupe commutatif et A un groupe. Une extension

$$1 \to X \to G \to A \to 1$$

est dite centrale si $X \subset Z(G)$. À isomorphisme de suites exactes induisant Id_X et Id_A près, ces **extensions centrales sont classifiées par le groupe** $H^2(A,X)$, que nous définissons maintenant. Pour $k \geq 0$, soit

$$C^k := \left\{ \hat{\lambda} : A^{k+1} \to X \;\middle|\; \forall u, a_0, \ldots, a_k \in A, \hat{\lambda}(ua_0, \ldots, ua_k) = \hat{\lambda}(a_0, \ldots, a_k) \right\}.$$

La contrainte imposée ici à $\hat{\lambda}$ s'appelle l'homogénéité ; on la note: $\hat{\lambda} : A^{k+1} \hat{\longrightarrow} X$. Il y a des applications $\mathrm{d} : C^{k-1} \to C^k$ données par

$$\mathrm{d}\hat{\lambda}(a_0, \ldots, a_k) = \prod_{i=0}^{k} \hat{\lambda}(a_0, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_k)^{(-1)^i}$$

et dont la somme directe (encore notée d) vérifie $\mathrm{d} \circ \mathrm{d} = 1_X$. On définit

$$H^k(A,X) := \ker(\mathrm{d}|_{C^k}) / \mathrm{Im}(\mathrm{d}|_{C^{k-1}}).$$

À présent, une extension centrale de A par X peut toujours être munie d'une section ensembliste, ou choix d'un "zéro" sur chaque fibre : G s'identifie alors à $X \times A$ muni d'une loi de groupe de la forme

$$(x,a)(y,b) = (xy\lambda(a,b), ab)$$

pour une certaine fonction $\lambda : A^2 \to X$. L'associativité s'exprime comme une contrainte sur λ : en effet $((x,a)(y,b))(z,c) = (xyz\lambda(a,b)\lambda(ab,c), abc)$ tandis que $(x,a)((y,b)(z,c)) = (xyz\lambda(a,bc)\lambda(b,c), abc)$, d'où

$$\lambda(a,b)\lambda(ab,c) = \lambda(a,bc)\lambda(b,c) \tag{1}$$

pour tous $a,b,c \in A$. De plus, perturber la section par une fonction $\mu : A \to X$ (i.e. reparamétriser les fibres) correspond à multiplier $\lambda : A^2 \to X$ par la fonction

$$(a,b) \mapsto \mu(ab)^{-1}\mu(a)\mu(b). \tag{2}$$

Nous prétendons que l'espace Λ des fonctions $\lambda : A^2 \to X$ vérifiant (1), vues modulo les fonctions de la forme (2), s'identifie[1] à $H^2(A,X)$. Pour le voir, il faut identifier tout $\lambda : A^k \to X$ (pour $k = 1$ ou 2) à un $\hat{\lambda} \in C^k$, donné par

$$\hat{\lambda}(u, ua_1, ua_1a_2, \ldots, ua_1 \ldots a_k) = \lambda(a_1, \ldots, a_k)$$

pour tous $u, a_1, \ldots, a_k \in A$. Ce faisant, nous avons

$$\begin{aligned}
\Lambda &= \frac{\{\lambda : A^2 \to X \mid \forall a,b,c \in A, \lambda(ab,c)\lambda(a,b) = \lambda(b,c)\lambda(a,bc)\}}{\{(a,b) \mapsto \mu(ab)^{-1}\mu(a)\mu(b) \mid \mu : A \to X\}} \\
&\simeq \frac{\left\{ \hat{\lambda} : A^3 \hat{\longrightarrow} X \;\middle|\; \begin{array}{c} \forall a,b,c,u \in A, \\ \hat{\lambda}(u,uab,uabc)\hat{\lambda}(u,ua,uab) = \hat{\lambda}(ua,uab,uabc)\hat{\lambda}(u,ua,uabc) \end{array} \right\}}{\{(u,ua,uab) \mapsto \hat{\mu}(u,uab)^{-1}\hat{\mu}(u,ua)\hat{\mu}(ua,uab) \mid \hat{\mu} : A^2 \hat{\longrightarrow} X\}} \\
&= \frac{\left\{ \hat{\lambda} \in C^2 \;\middle|\; \forall a,b,c,u \in A, \mathrm{d}\hat{\lambda}(u,ua,uab,uabc) = 1_X \right\}}{\{(u,ua,uab) \mapsto \mathrm{d}\hat{\mu}(u,ua,uab) \mid \hat{\mu} \in C^1\}} \\
&= \ker(\mathrm{d}|_{C^2}) / \mathrm{Im}(\mathrm{d}|_{C^1}) \\
&= H^2(A,X).
\end{aligned}$$

[1] Remarquer déjà que (1) et (2) ont respectivement 4 et 3 termes, tout comme $\mathrm{d}|_{C^2}$ et $\mathrm{d}|_{C^1}$...