Variété des caractères

FG

Pour $A, B \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ on a l'identité

$$\mathrm{Tr}(AB) + \mathrm{Tr}(AB^{-1}) = \mathrm{Tr}(A)\mathrm{Tr}(B).$$

Preuve : le membre de gauche se factorise en remarquant $B + B^{-1} = \mathrm{Tr}(B)\,\mathrm{Id}$ et en utilisant la linéarité de la trace et du produit matriciel.

Étant donnés des générateurs $A_1, \ldots, A_N \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, notons $\mathrm{I}_{i_1 \ldots i_n}$ pour $\mathrm{Tr}(A_{i_1} \ldots A_{i_n})$. Si A_i est remplacé par son inverse, on place une barre au dessus de l'indice i correspondant dans la notation: ainsi $\mathrm{Tr}(A_1 A_3^{-1} A_2^{-1}) = \mathrm{I}_{1\overline{32}}$. Le mot vide est noté ε. Les identités

$$\mathrm{I}_\varepsilon = 2, \quad \mathrm{I}_{\overline{1}} = \mathrm{I}_1, \quad \mathrm{I}_{12} = \mathrm{I}_{21}, \quad \mathrm{I}_{12\overline{1}} = \mathrm{I}_2$$

sont évidentes et seront utilisées sans avertissement dans la suite (permutations cycliques des indices, etc). Montrons :

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}_{12} + \mathrm{I}_{1\overline{2}} &= \mathrm{I}_1\mathrm{I}_2 && (1)\\
\mathrm{I}_{12\overline{12}} &= \mathrm{I}_1^2 + \mathrm{I}_2^2 + \mathrm{I}_{12}^2 - \mathrm{I}_1\mathrm{I}_2\mathrm{I}_{12} - 2 && (2)\\
\mathrm{I}_{123} + \mathrm{I}_{132} &= \mathrm{I}_{12}\mathrm{I}_3 + \mathrm{I}_{13}\mathrm{I}_2 + \mathrm{I}_{23}\mathrm{I}_1 - \mathrm{I}_1\mathrm{I}_2\mathrm{I}_3 && (3)\\
\mathrm{I}_{123}\mathrm{I}_{132} &= \mathrm{I}_1^2 + \mathrm{I}_2^2 + \mathrm{I}_3^2 + \mathrm{I}_{12}^2 + \mathrm{I}_{13}^2 + \mathrm{I}_{23}^2 + \mathrm{I}_{12}\mathrm{I}_{13}\mathrm{I}_{23} \\
&\quad - (\mathrm{I}_1\mathrm{I}_2\mathrm{I}_{12} + \mathrm{I}_1\mathrm{I}_3\mathrm{I}_{13} + \mathrm{I}_2\mathrm{I}_3\mathrm{I}_{23}) - 4 && (4)\\
4 &= \mathrm{I}_1^2 + \mathrm{I}_2^2 + \mathrm{I}_3^2 + \mathrm{I}_{123}^2 + \mathrm{I}_1\mathrm{I}_2\mathrm{I}_3\mathrm{I}_{123} + \mathrm{I}_{12}^2 + \mathrm{I}_{23}^2 + \mathrm{I}_{13}^2 + \mathrm{I}_{12}\mathrm{I}_{23}\mathrm{I}_{13} \\
&\quad - (\mathrm{I}_1\mathrm{I}_{123} + \mathrm{I}_2\mathrm{I}_3)\mathrm{I}_{23} - (\mathrm{I}_2\mathrm{I}_{123} + \mathrm{I}_1\mathrm{I}_3)\mathrm{I}_{13} - (\mathrm{I}_3\mathrm{I}_{123} + \mathrm{I}_1\mathrm{I}_2)\mathrm{I}_{12} && (5)\\
2\mathrm{I}_{1234} &= \mathrm{I}_{12}\mathrm{I}_{34} + \mathrm{I}_{14}\mathrm{I}_{23} - \mathrm{I}_{13}\mathrm{I}_{24} + \mathrm{I}_1\mathrm{I}_{234} + \mathrm{I}_2\mathrm{I}_{134} + \mathrm{I}_3\mathrm{I}_{124} + \mathrm{I}_4\mathrm{I}_{123} \\
&\quad + \mathrm{I}_1\mathrm{I}_2\mathrm{I}_3\mathrm{I}_4 - (\mathrm{I}_{12}\mathrm{I}_3\mathrm{I}_4 + \mathrm{I}_{23}\mathrm{I}_4\mathrm{I}_1 + \mathrm{I}_{34}\mathrm{I}_1\mathrm{I}_2 + \mathrm{I}_{14}\mathrm{I}_2\mathrm{I}_3) && (6)
\end{aligned}$$

L'identité (1) est celle du début de la note. Nous l'utiliserons aussi abondamment, en particulier sous la forme $\mathrm{I}_{uvw} = \mathrm{I}_v\mathrm{I}_{uw} - \mathrm{I}_{u\overline{v}w}$ avec u, v, w des mots qui éventuellement se simplifient. Nous graisserons alors le v dans le membre de gauche pour mettre en évidence la manipulation : $\mathrm{I}_{u\boldsymbol{v}w} = \mathrm{I}_v\mathrm{I}_{uw} - \mathrm{I}_{u\overline{v}w}$.

Pour (2), calculons

$$\mathrm{I}_{12\boldsymbol{\overline{12}}} = \mathrm{I}_{12}\mathrm{I}_{\overline{12}} - \mathrm{I}_{1\mathbf{2}21} = \mathrm{I}_{12}^2 - \mathrm{I}_2\mathrm{I}_{12\mathbf{1}} + \mathrm{I}_{1\mathbf{1}} = \mathrm{I}_{12}^2 - \mathrm{I}_2(\mathrm{I}_1\mathrm{I}_{12} - \mathrm{I}_2) + \mathrm{I}_1^2 - 2.$$

Pour (3), remarquons que le membre de gauche vaut $\mathrm{I}_{123} + \mathrm{I}_{\overline{123}}$ et calculons

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}_{123} + \mathrm{I}_{\overline{123}} &= (\mathrm{I}_{123} + \mathrm{I}_{12\overline{3}}) - (\mathrm{I}_{12\overline{3}} + \mathrm{I}_{1\overline{23}}) + (\mathrm{I}_{1\overline{23}} + \mathrm{I}_{\overline{123}}) \\
&= \mathrm{I}_{12}\mathrm{I}_3 - \mathrm{I}_{1\boldsymbol{\overline{3}}}\mathrm{I}_2 + \mathrm{I}_{23}\mathrm{I}_1 = \mathrm{I}_{12}\mathrm{I}_3 - \mathrm{I}_2(\mathrm{I}_1\mathrm{I}_3 - \mathrm{I}_{13}) + \mathrm{I}_{23}\mathrm{I}_1
\end{aligned}$$

en utilisant (1) trois fois à la deuxième égalité.

Pour (4), calculons

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}_{123}\mathrm{I}_{132} &= \mathrm{I}_{123\mathbf{13}2} + \mathrm{I}_{23\overline{23}} \qquad \text{par (1)}\\
&= \mathrm{I}_{13}\mathrm{I}_{1\mathbf{23}2} - \mathrm{I}_{1\mathbf{2}\bar{\mathbf{1}}2} + \mathrm{I}_{23\overline{23}}\\
&= \mathrm{I}_{13}(\mathrm{I}_{23}\mathrm{I}_{12} - \mathrm{I}_{1\bar{\mathbf{3}}}) - \mathrm{I}_{2\bar{\mathbf{1}}}\mathrm{I}_{12} + \mathrm{I}_{1\mathbf{1}} + \mathrm{I}_{23\overline{23}}\\
&= \mathrm{I}_{13}(\mathrm{I}_{23}\mathrm{I}_{12} - \mathrm{I}_{1}\mathrm{I}_{3} + \mathrm{I}_{13}) - (\mathrm{I}_{1}\mathrm{I}_{2} - \mathrm{I}_{12})\mathrm{I}_{12} + \mathrm{I}_{1}^{2} - 2 + \mathrm{I}_{23\overline{23}}\ .
\end{aligned}$$

On conclut en exprimant $\mathrm{I}_{23\overline{23}}$ par (2).

Pour (5), notons que (3)-(4) peuvent s'interpréter comme signifiant que I_{123} et I_{132} sont les deux racines d'un certain polynôme quadratique P dont les coefficients sont des fonctions explicites de I_1, I_2, I_3, I_{12}, I_{23}, I_{13}. Alors (5) n'est autre que la relation $P(\mathrm{I}_{123}) = 0$.

Pour (6), calculons

$$\begin{aligned}
2\mathrm{I}_{1234} &= (\mathrm{I}_{1234} + \mathrm{I}_{\overline{21}34}) - (\mathrm{I}_{\overline{21}34} + \mathrm{I}_{\overline{23}14}) + (\mathrm{I}_{\overline{23}14} + \mathrm{I}_{\overline{2341}})\\
&\quad - (\mathrm{I}_{\overline{2341}} + \mathrm{I}_{\overline{234}1}) + (\mathrm{I}_{\overline{234}1} + \mathrm{I}_{\overline{23}41}) - (\mathrm{I}_{\overline{23}41} + \mathrm{I}_{\overline{2}341}) + (\mathrm{I}_{\overline{2}341} + \mathrm{I}_{2341})\\
&= \mathrm{I}_{12}\mathrm{I}_{34} - \mathrm{I}_{\bar{\mathbf{1}}3}\mathrm{I}_{\bar{\mathbf{2}}4} + \mathrm{I}_{14}\mathrm{I}_{23} - \mathrm{I}_{1}\mathrm{I}_{243} + \mathrm{I}_{4}\mathrm{I}_{1\overline{\mathbf{23}}} - \mathrm{I}_{3}\mathrm{I}_{1\bar{\mathbf{2}}4} + \mathrm{I}_{2}\mathrm{I}_{134} \qquad \text{par (1)}\\
&= \mathrm{I}_{12}\mathrm{I}_{34} - (\mathrm{I}_{1}\mathrm{I}_{3} - \mathrm{I}_{13})(\mathrm{I}_{2}\mathrm{I}_{4} - \mathrm{I}_{24}) + \mathrm{I}_{14}\mathrm{I}_{23}\\
&\quad - \mathrm{I}_{1}\,\underbrace{\mathrm{I}_{243}} + \mathrm{I}_{4}(\mathrm{I}_{1}\mathrm{I}_{23} - \underbrace{\mathrm{I}_{132}}) - \mathrm{I}_{3}(\mathrm{I}_{2}\mathrm{I}_{14} - \mathrm{I}_{124}) + \mathrm{I}_{2}\mathrm{I}_{134}.
\end{aligned}$$

Or par (3) on a $\mathrm{I}_{243} = \mathrm{I}_{23}\mathrm{I}_{4} + \mathrm{I}_{24}\mathrm{I}_{3} + \mathrm{I}_{34}\mathrm{I}_{2} - \mathrm{I}_{2}\mathrm{I}_{3}\mathrm{I}_{4} - \mathrm{I}_{234}$ et $\mathrm{I}_{132} = \mathrm{I}_{12}\mathrm{I}_{3} + \mathrm{I}_{13}\mathrm{I}_{2} + \mathrm{I}_{23}\mathrm{I}_{1} - \mathrm{I}_{1}\mathrm{I}_{2}\mathrm{I}_{3} - \mathrm{I}_{123}$: après substitution et simplification il vient (6).

La relation (6) permet récursivement d'exprimer toute trace I_w comme un polynôme en des traces de mots d'au plus trois lettres (i.e. de la forme $A_i^{\pm 1}$, $A_i^{\pm 1}A_j^{\pm 1}$ et $A_i^{\pm 1}A_j^{\pm 1}A_k^{\pm 1}$), à coefficients dans $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$. Par (1) on peut supposer, pour chaque mot, que tous les exposants valent $+1$ et que i, j, k sont distincts. Par (3) on peut aussi supposer $i < j < k$ pour les mots de trois lettres. Ainsi,

$$\mathrm{I}_w \in \mathbb{Z}[\tfrac{1}{2}]\left[\{\mathrm{I}_i\}_{1\le i\le N}, \{\mathrm{I}_{ij}\}_{1\le i<j\le N}, \{\mathrm{I}_{ijk}\}_{1\le i<j<k\le N}\right].$$