

Feuille 1. NORMES

Exercice 1 (Propriétés de la valeur absolue) Soient $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$.

- 1°. Montrer que $|x + y| \leq |x| + |y|$. Sous quelles hypothèses sur x et y a-t-on $|x + y| = |x| + |y|$?
- 2°. Montrer que $|x - y| \geq ||x| - |y||$.

Exercice 2 (Inégalité de Cauchy-Schwarz et la norme euclidienne) Soient $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. On note

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

On considère $P(\lambda) = \|\lambda x + y\|_2^2 = \langle \lambda x + y, \lambda x + y \rangle$.

- 1°. Vérifier que $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ et que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{R}^n$,

$$\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$$

- 2°. Écrire $P(\lambda)$ sous la forme

$$P(\lambda) = A(x, y)\lambda^2 + 2B(x, y)\lambda + C(x, y)$$

en explicitant $A(x, y)$, $B(x, y)$ et $C(x, y)$.

- 3°. Dédurre de ce qui précède l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\|_2 \|y\|_2.$$

- 4°. Montrer que $\|\cdot\|_2$ est une norme sur \mathbb{R}^n .

Exercice 3 (Comparaison des 3 normes usuelles) On reprend les notations de l'exercice précédent et celles du cours.

- 1°. Montrer que pour tout $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on a les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} \|x\|_\infty &\leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty; \\ \|x\|_\infty &\leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n}\|x\|_\infty; \\ \|x\|_2 &\leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n}\|x\|_2. \end{aligned}$$

Montrer que chacune de ces inégalités est optimale.

- 2°. Que peut-on dire de ces trois normes ?
- 3°. Dessiner la boule unité associée à chacune de ces trois normes dans \mathbb{R}^2 .

Exercice 4 Soit $(E, \|\cdot\|)$ un e.v.n. Montrer que pour tout $x, y \in E$, on a $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x + y\|$.

Exercice 5 [CC1, 2018] On définit les applications suivantes pour $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$:

$$N_1(x) = |x_1 + 2x_2|, \quad N_2(x) = |x_1| + 2|x_2|, \quad N_3(x) = \sup_{t \in [1, 2]} |x_1 + tx_2|.$$

- 1°. Montrer que N_2 et N_3 définissent deux normes sur \mathbb{R}^2 .
- 2°. L'application N_1 définit-elle une norme sur \mathbb{R}^2 ? Justifier.

- 3°. Déterminer la boule unité fermée associée à N_2 .
 4°. Trouver des nombres réels $A > 0$ et $B > 0$ tels que pour tout (x, y) dans \mathbb{R}^2 ,

$$AN_2(x) \leq N_3(x) \leq BN_2(x),$$

Exercice 6 Soit $p > 1$ et $n \geq 2$. Pour tout $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on définit

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}.$$

- 1°. Vérifier que $\|x\| = 0 \iff x = 0$.
 2°. Vérifier que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\|\lambda x\|_p = |\lambda| \|x\|_p$.
 3°. On veut maintenant montrer que l'inégalité triangulaire est vérifiée.
 a. Soit $q > 1$ tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Montrer l'Inégalité de young :

$$\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}, |ab| \leq \frac{|a|^p}{p} + \frac{|b|^q}{q}.$$

Indication : Calculer le minimum de la fonction $f(x) = \frac{x^p}{p} + \frac{|b|^q}{q} - x|b|$ pour $x > 0$.

- b. En déduire l'Inégalité de Hölder : pour tout $A = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ et $B = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$, on a :

$$\sum_{j=1}^n |a_j b_j| \leq \|A\|_p \|B\|_q.$$

Indication : Supposer dans un premier temps que $\|A\|_p = \|B\|_q = 1$.

- c. Montrer que pour tout $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et pour tout $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, on a :

$$\sum_{j=1}^n |x_j| |x_j + y_j|^{p-1} \leq \|x\|_p \left(\sum_{j=1}^n |x_j + y_j|^p \right)^{\frac{1}{q}}.$$

- d. En déduire que

$$\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p.$$

- e. L'inégalité triangulaire est-elle toujours vérifiée si $0 < p < 1$?
 4°. Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a :

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_p \leq n^{\frac{1}{p}} \|x\|_\infty.$$

- 5°. En déduire la limite quand $p \rightarrow +\infty$ de $\|x\|_p$.

Exercice 7 On considère $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans \mathbb{R} . Pour tout $A = (a_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$, on pose

$$\|A\| = n \max_{i,j} |a_{i,j}|.$$

- 1°. Vérifier que $\|\cdot\|$ est une norme sur E .
 2°. Montrer que pour tous $A, B \in E$ on a :

$$\|AB\| \leq \|A\| \|B\|.$$

Exercice 8 (Un exemple en dimension infinie)

Soient E l'espace vectoriel des fonctions continues de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} . Pour tout $f \in E$, on pose

$$\|f\| = \int_0^1 |f(x)| dx, \quad \|f\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|.$$

1°. Vérifier que $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont deux normes sur E .

2°. Montrer que, pour tout $f \in E$,

$$\|f\| \leq \|f\|_\infty.$$

3°. Montrer que ces deux normes ne sont pas équivalentes.