**Université de Strasbourg**
M1 Algèbre S1
P. Guillot, bureau 314, `guillot@math.unistra.fr`

# Espaces vectoriels normés : exercices supplémentaires

**Exercice 1.** Etudier la continuité en $(0,0)$ des fonctions suivantes :

1. $$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

2. $$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

3. $$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4y}{x^4+y^6} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

4. $$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^4}{x^4+y^6} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

5. $$f(x,y) = \begin{cases} xe^{\arctan \frac{y}{x}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

6. $$f(x,y) = \begin{cases} \frac{(x+y)^4}{x^4+y^4} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

7. $$f(x,y) = \begin{cases} \frac{|x|^3|y|^5}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

8. $$f(x,y) = \begin{cases} \frac{e^{xy}-1}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

9. $$f(x,y) = \begin{cases} \frac{(x+2y)^3y^3}{x^4+y^4} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

10. $$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^6+x^2y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

11. $$f(x,y) = \begin{cases} e^{\frac{x}{y}} & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

**Exercice 2.** Soit $E$ et $F$ des espaces vectoriels normés et $f, g$ deux fonctions continues $E \longrightarrow F$. On pose

$$A = \{x \in E \mid f(x) = g(x)\}.$$

Montrer que $A$ est fermé.

*Application :* soient $f, g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues telles que $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{Q}$. Montrer que $f = g$.

*Plus difficile :* montrer, en utilisant la question précédente, que si $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue et vérifie $f(x+y) = f(x) + f(y)$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, alors il existe un $a \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = ax$ pour tout $x$. (*Indications : si $a$ existe, alors $a = f(1)$ ; montrer d'abord que $f(x) = ax$ pour $x \in \mathbb{Q}$ puis utiliser la question précédente.*)

**Exercice 3.** On souhaite trouver toutes les fonctions $f$ continues sur $\mathbb{R}^2$ telles que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x,y) = f(x+y, x-y).$$

1. Soit $g\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $g(x,y) = g(x+y, x-y)$. Calculer $g \circ g(x,y)$.
2. En déduire que, si $f$ est comme ci-dessus, alors

   $$f(x,y) = f\left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right)$$

   pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
3. En déduire que $f$ est constante.

**Exercice 4.** Dans cet exercice on prend $E = M_2(\mathbb{R})$, l'espace vectoriel des matrices réelles $2 \times 2$, que l'on peut identifier à $\mathbb{R}^4$ si l'on veut. On prend la norme $\|\cdot\|_\infty$ par exemple.

1. Rappeler la formule pour le déterminant d'une matrice $2 \times 2$, puis en déduire que la fonction $f\colon E \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par $f(M) = \det(M)$ est continue.
2. En déduire que l'ensemble

   $$U = \{M \in E \mid M \text{ est inversible}\}$$

   est ouvert. *On le note souvent $GL_2(\mathbb{R})$.*
3. On considère maintenant la fonction $g\colon E \longrightarrow E$ donnée par $g(M) = {}^tMM$ (où ${}^tM$ est la transposée de $M$). Écrire une formule explicite pour $g$ en coordonnées, et en déduire que $g$ est continue.
4. En déduire que l'ensemble

   $$X = \{M \in E \mid {}^tMM = I\}$$

   est fermé (où $I$ est la matrice identité). *On le note souvent $O_2(\mathbb{R})$.*
5. Montrer que $X$ est compact.