Université de Strasbourg
M1 Algèbre S1
P. Guillot, bureau 314, `guillot@math.unistra.fr`

Espaces vectoriels normés : exercices supplémentaires

Exercice 1. *Normes d'applications linéaires.*

Soient E et F des espaces vectoriels normés ; on notera $|x|$ la norme du vecteur x. On note $\mathcal{L}(E,F)$ l'espace vectoriel des applications linéaires *continues* de E dans F.

Enfin, on pose

$$\|f\| = \sup_{|x|=1} |f(x)| ,$$

pour $f \in \mathcal{L}(E,F)$.

1. Montrer que $\|\cdot\|$ est une norme.
2. Montrer que, avec des notations évidentes, on a
$$\|g \circ f\| \leq \|g\| \, \|f\| .$$
3. Montrer que si F est complet, alors $\mathcal{L}(E,F)$ est également complet pour la norme $\|\cdot\|$.

Exercice 2. Pour chacune des normes usuelles sur $\mathbb{R}^n$, on va calculer la norme correspondante sur $M_n(\mathbb{R}) = \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ (comme dans l'exercice 1.) Soit $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, et $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$. Les trois normes que nous allons considérer sont

$$|x|_\infty = \max_i(|x_i|) ,$$

$$|x|_1 = \sum_i |x_i| ,$$

et

$$|x|_2 = \sqrt{\sum_i x_i^2} .$$

1. Si on prend la norme $|\cdot|_\infty$, montrer que
$$\|A\| = \max_i |L_i|_1 ,$$
où L_i est la i-ème ligne de A.
2. Si on prend la norme $|\cdot|_1$, montrer que
$$\|A\| = \max_j |C_j|_1 ,$$
où C_j est la j-ème colonne de A.
3. Dans le cas de la norme $|\cdot|_2$, nous allons montrer que $\|A\|$ est la *racine carrée de la valeur absolue de la plus grande valeur propre de* ${}^tAA$. Pour cela, il va falloir anticiper sur un résultat que vous verrez en algèbre à la fin du semestre.
   (a) Montrer que $\|A\| = \|{}^tA\|$.
   (b) Montrer que $\|A\| = \sqrt{\|{}^tAA\|}$.
   (c) Soit M telle ${}^tM = M$ (par exemple $M = {}^tAA$ pour n'importe quelle matrice A). Montrer que $\|M\|$ est la valeur absolue de la plus grande valeur propre de M.
   Indication. Utilisez le théorème suivant (appelé parfois « théorème spectral ») : lorsque ${}^tM = M$, il existe une base $e_1, \ldots, e_n$ de $\mathbb{R}^n$ qui est *orthonormale* et dans laquelle M est diagonalisée.
   (d) Conclure.