$\boxed{Chapitre\ 1.\ \text{NORMES}}$

On considère un $\mathbb{R}$-espace vectoriel noté E.
Voici quelques exemples de $\mathbb{R}$-espaces vectoriels :

- $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ et plus généralement $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}^*$;
- $E = \mathcal{M}(n, \mathbb{R})$: l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n, à coefficients dans $\mathbb{R}$;
- $E = \mathcal{C}^0([0,1])$: l'espace vectoriel des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.

1. Définition

Définition 1.1. − Une application $\|\cdot\| : E \mapsto \mathbb{R}^+$ est appelée *norme sur E* si elle vérifie les propriétés suivantes : $\forall\ x, y \in E,\ \lambda \in \mathbb{R}$,

i) $\|x\| = 0 \iff x = 0$;
ii) $\|\lambda x\| = |\lambda|\ \|x\|$;
iii) $\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ (inégalité triangulaire).

Le nombre $\|x\|$ est appelée *norme de x*.

Exemples : La valeur absolue est une norme sur $\mathbb{R}$.

Trois exemples de normes sur $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, sont donnés dans le prochain paragraphe. Des exemples de normes sur $\mathcal{M}(n, \mathbb{R})$ et sur $\mathcal{C}^0([0,1])$ sont donnés respectivement dans les exercices 7 et 8 de la feuille 1.

Définition 1.2 (E.v.n.). L'espace vectoriel E muni d'une norme $\|\cdot\|$ est appelé espace vectoriel normé. On le notera $(E, \|\cdot\|)$.

2. Les normes usuelles sur $\mathbb{R}^n$

On considère dans ce paragraphe le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ avec $n \geq 2$.
Pour $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on pose

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| \qquad ; \qquad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \qquad ; \qquad \|x\|_\infty = \max_{i=1,\cdots,n} |x_i|.$$

PROPOSITION 2.1. *: Les trois applications $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont des normes sur $\mathbb{R}^n$.*

DÉMONSTRATION. Clairement, ces trois applications sont à valeurs dans $\mathbb{R}^+$.

Montrons que $\|\cdot\|_1$ est une norme, autrement dit, que les trois propriétés de la définition 1.1 sont vérifiées.

Soient $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

i) Rappelons qu'une somme de nombres positifs est nulle si et seulement si tous ces nombres sont nuls.

$$\begin{aligned} \|x\|_1 = 0 &\iff \sum_{i=1}^n |x_i| \iff \forall i \in \{1, \ldots, n\},\ |x_i| = 0 \\ &\iff \forall i \in \{1, \ldots, n\},\ x_i = 0 \iff x = 0. \end{aligned}$$

ii) On a $\lambda x = (\lambda x_1, \cdots, \lambda x_n)$, de sorte que

$$\|\lambda x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |\lambda x_i| = \sum_{i=1}^{n} (|\lambda||x_i|) = |\lambda| \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i| \right) = |\lambda|\|x\|_1.$$

iii) Rappelons que d'après l'inégalité triangulaire dans $\mathbb{R}$, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, on a

$$|x_i + y_i| \leq |x_i| + |y_i|.$$

On a alors

$$\|x + y\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i| \leq \sum_{i=1}^{n} (|x_i| + |y_i|) = \sum_{i=1}^{n} |x_i| + \sum_{i=1}^{n} |y_i| = \|x\|_1 + \|y\|_1.$$

Montrons maintenant que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme. Soient $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

i)

$$\begin{aligned} \|x\|_\infty = 0 \iff \max_{i=1,\cdots,n} |x_i| \iff \max_{i=1,\cdots,n} |x_i| \iff \forall i \in \{1, \ldots, n\},\ |x_i| = 0 \\ \iff \forall i \in \{1, \ldots, n\},\ x_i = 0 \iff x = 0. \end{aligned}$$

ii)

$$\|\lambda x\|_\infty = \max_{i=1,\ldots,n} |\lambda x_i| = \max_{i=1,\ldots,n} |\lambda||x_i| = |\lambda| \max_{i=1,\ldots,n} |x_i| = |\lambda|\|x\|_\infty.$$

iii) Pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, on a

$$|x_i + y_i| \leq |x_i| + |y_i| \leq \max_{i=1,\ldots,n} |x_i| + \max_{i=1,\ldots,n} |y_i| = \|x\|_\infty + \|y\|_\infty.$$

On a alors

$$\|x + y\|_\infty = \max_{i=1,\ldots,n} |x_i + y_i| \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty.$$

Le cas de la norme euclidienne sera traité en TD (voir Exercice 2, Feuille 1). ■

PROPOSITION 2.2. *: Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a les inégalités suivantes :*

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty;$$
$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n}\|x\|_\infty;$$
$$\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n}\|x\|_2.$$

DÉMONSTRATION. Posons $x = (x_1, \cdots, x_n)$.
Comparons d'abord les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$.

Il existe $i_x \in \{1, \cdots, n\}$ tel que $\|x\|_\infty = |x_{i_x}|$. On a alors

$$\|x\|_\infty = |x_{i_x}| \leq \sum_{i=0}^{n} |x_i| = \|x\|_1.$$

De plus, pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$, $|x_i| \leq \|x\|_\infty$. On obtient alors

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \leq \sum_{i=1}^{n} \|x\|_\infty = n\|x\|_\infty.$$

Comparons maintenant les normes $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$.

Soit $i_x \in \{1, \cdots, n\}$ tel que $\|x\|_\infty = |x_{i_x}|$. On a alors

$$\|x\|_\infty^2 = |x_{i_x}|^2 \leq \sum_{i=0}^{n} |x_i|^2 = \|x\|_2^2.$$

De plus, pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$, $|x_i| \leq \|x\|_\infty$. On obtient alors

$$\|x\|_2^2 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \leq \sum_{i=1}^{n} \|x\|_\infty^2 = n\|x\|_\infty^2.$$

Nous avons obtenu les inégalités

$$\|x\|_\infty^2 \leq \|x\|_2^2 \leq n\|x\|_\infty^2$$

ce qui est équivalent, en prenant les racines carrées, à

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n}\|x\|_\infty.$$

Le troisième encadrement sera traité en TD (voir Exercice 3, Feuille 1).

■

3. Equivalence de normes

Définition 3.1. Soient $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ deux normes sur E. On dit que $\|\cdot\|_1$ est *équivalente* à $\|\cdot\|_2$ s'il existe deux constantes réelles $a, b > 0$ telles que :

$$\forall\, x \in E, \quad a\,\|x\|_2 \leqslant \|x\|_1 \leqslant b\,\|x\|_2$$

On note alors $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_2$.

PROPOSITION 3.2. *: Cette relation est une relation d'équivalence sur l'ensemble des normes sur E.*

DÉMONSTRATION. :

- Réfléxivité : $\forall\, x \in E$, on choisit $a = b = 1$: $\|x\|_1 \leqslant \|x\|_1 \leqslant \|x\|_1$.
- Symétrie : On suppose qu'il existe $a, b > 0$ tels que pour tout $x \in E$, $a\,\|x\|_2 \leqslant \|x\|_1 \leqslant b\,\|x\|_2$, alors $\frac{1}{b}\,\|x\|_1 \leqslant \|x\|_2 \leqslant \frac{1}{a}\,\|x\|_1$.
- Transitivité : On suppose qu'il existe $a, b, c, d > 0$ tels que pour tout $x \in E$, $a\,\|x\|_2 \leqslant \|x\|_1 \leqslant b\,\|x\|_2$ et $c\,\|x\|_3 \leqslant \|x\|_2 \leqslant d\,\|x\|_3$.
  Alors $ac\,\|x\|_3 \leqslant \|x\|_1 \leqslant bd\,\|x\|_3$.

■

4. Boules unité associée à une norme

Définition 4.1. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un evn.

- L'ensemble
$$B(0,1) = \{x \in E : \|x\| < 1\}$$
est appelée boule unité ouverte.

- L'ensemble
$$B'(0,1) = \{x \in E : \|x\| \leq 1\}$$
est appelée boule unité fermée.

5. Produit cartésien d'espaces vectoriels normés

Soient E et F deux espaces vectoriels munis respectivement des normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$. On note
$$G = E \times F = \{z = (x,y),\ x \in E;\ y \in F\}$$
le produit cartésien de ces deux espaces et on définit l'application :
$$\begin{aligned} \|\cdot\| : G &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ z = (x,y) &\longmapsto \max(\|x\|_1, \|y\|_2). \end{aligned}$$

PROPOSITION 5.1. *L'application définie ci-dessus* $\|\cdot\|$: *est une norme sur* G.

DÉMONSTRATION. Soient $z = (x,y)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
i) $\|z\| = 0 \Longleftrightarrow \max(\|x\|_1, \|y\|_2) = 0 \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \|x\|_1 = 0 \Longleftrightarrow x = 0 \\ \|y\|_2 = 0 \Longleftrightarrow y = 0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow z = 0.$
ii) $\|\lambda z\| = \max(\|\lambda x\|_1, \|\lambda y\|_2) = |\lambda| \max(\|x\|_1, \|y\|_2) = |\lambda|\ \|z\|.$
iii) Soient un deuxième élément $z' = (x', y') \in G$. Vérifions l'inégalité triangulaire.
$\|z + z'\| = \|(x + x', y + y')\| = \max(\|x + x'\|_1, \|y + y'\|_2)$

Or $\left\{\begin{array}{l} \|x + x'\|_1 \leqslant \|x\|_1 + \|x'\|_1 \ \leqslant \|z\| + \|z'\| \\ \|y + y'\|_2 \leqslant \|y\|_2 + \|y'\|_2 \leqslant \|z\| + \|z'\| \end{array}\right.$
Finalement, on a bien $\|z + z'\| \leqslant \|z\| + \|z'\|$.

■