Chapitre 2 : TOPOLOGIE DANS LES ESPACES VECTORIELS NORMÉS

Dans tout ce chapitre, on considère un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E non réduit à $\{0\}$ et muni d'une norme que l'on notera $\|\cdot\|$.

1. Rappels sur les ensembles

Définition 1.1.
Soit A une partie de E. On appelle Complémentaire de A dans E l'ensemble

$$E \setminus A = \{x \in E \ \text{ tel que } x \notin A\}.$$

Soient A_1 et A_2 deux parties de E. On appelle Intersection de A_1 et A_2 l'ensemble

$$A_1 \cap A_2 = \{x \in E \text{ tel que } x \in A \text{ et } x \in A_2\}.$$

On appelle Union de A_1 et A_2 l'ensemble

$$A_1 \cup A_2 = \{x \in E \text{ tel que } x \in A_1 \text{ ou } x \in A_2\}.$$

Plus généralement, pour une famille d'ensembles $\{A_i, i \in I\}$, où I est un ensemble d'indices fini ou infini,

$$x \in \bigcap_{i\in I} A_i \text{ si et seulement si pour tout } i \in I,\ x \in A_i.$$

$$x \in \bigcup_{i\in I} A_i \text{ si et seulement si il existe } i \in I \text{ tel que } x \in A_i.$$

PROPOSITION 1.2. *On a les propriétés suivantes :*
Soit A une partie de E.

$$E \setminus (E \setminus A) = A.$$

Soient A_1 et A_2 deux parties de E.

$$A_1 \subset A_2 \Longleftrightarrow E \setminus A_2 \subset E \setminus A_1.$$

$$E \setminus (A_1 \cup A_2) = (E \setminus A_1) \cap (E \setminus A_2)\,.$$

$$E \setminus (A_1 \cap A_2) = (E \setminus A_1) \cup (E \setminus A_2)\,.$$

Plus généralement,

$$E \setminus (\cup_{i\in I} A_i) = \cap_{i\in I} (E \setminus A_i)\,.$$

$$E \setminus (\cap_{i\in I} A_i) = \cup_{i\in I} (E \setminus A_i)\,.$$

2. Boules ouvertes, boules fermées

Définition 2.1. — Soit a un élément de E et r un nombre réel positif.

- On appelle boule ouverte de centre a et de rayon r le sous-ensemble de E :

$$B(a,r) = \{x \in E, \mid \|x-a\| < r\}.$$

- On appelle boule fermée de centre a et de rayon r le sous-ensemble de E :

$$B'(a,r) = \{x \in E,\ \|x-a\| \leqslant r\}.$$

Dans le cas particulier où $a = 0$ et $r = 1$:

- $B(0,1)$ est appelée boule unité ouverte.
- $B'(0,1)$ est appelée boule unité fermée.

Exemples Dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, $B(a,r) =]a-r, a+r[$, $B'(a,r) = [a-r, a+r]$

3. Ensembles ouverts, ensembles fermés

Définition 3.1. — On dit qu'une partie O de E est un *ouvert* si :

$$\forall\, x \in O,\ \exists\, \varepsilon > 0 \mid B(x,\varepsilon) \subset O.$$

Remarque 3.2. $\emptyset$ et E sont des ouverts.

Exemple. Dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, l'ensemble $]\alpha, +\infty[$ est un ouvert. L'ensemble $[\alpha, +\infty[$ n'est pas un ouvert.

PROPOSITION 3.3.

(1) *Toute réunion d'ouverts est un ouvert.*
(2) *Toute intersection* **finie** *d'ouverts est un ouvert.*

DÉMONSTRATION.

(1) Soit $\{O_i,\ i \in I\}$ une famille d'ouverts (I est fini ou infini). Pour tout $x \in \bigcup_{i\in I} O_i$, il existe $i \in I$ tel que $x \in O_i$. Comme O_i est un ouvert, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(x,\varepsilon) \subset O_i \subset \bigcup_{i\in I} O_i$.
(2) Soit $\{O_i,\ i = 1,\dots,n\}$ une famille finie d'ouverts ($n \in \mathbb{N}^*$). Soit $x \in \bigcap_{i\in I} O_i$. Pour tout $i \in \{1,\dots,n\}$, $x \in O_i$ et comme O_i est un ouvert, il existe $\varepsilon_i > 0$ tel que $B(x,\varepsilon_i) \subset O_i$. On pose $\varepsilon = \min(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)$. On a $\varepsilon > 0$ et

$$B(x,\varepsilon) \subset \bigcap_{i=1}^{n} B(x,\varepsilon_i) \subset \bigcap_{i=1}^{n} O_i.$$

■

Définition 3.4. — On dit qu'une partie F de E est un fermé de E si $E \setminus F$ est un ouvert de E.

Attention : Ne pas confondre "$E \setminus F$ ouvert" et "F n'est pas ouvert" !

Remarque 3.5. Par exemple, E est un ouvert et $E \setminus E = \emptyset$ est un ouvert donc E est aussi un fermé.

De même, $\emptyset$ est aussi un ouvert et $E \setminus \emptyset = E$ est un ouvert donc $\emptyset$ est aussi un fermé.
E est $\emptyset$ sont à la fois ouverts et fermés.

Remarque 3.6. $E\backslash O$ est un fermé si et seulement si O est un ouvert. En effet, $O = E\backslash(E\backslash O)$.

Exemple. Dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, l'ensemble $[-\infty, \alpha]$ est un fermé. L'ensemble $]-\infty, \alpha[$ n'est pas un fermé.

PROPOSITION 3.7.

(1) *Toute intersection de fermés est un fermé .*
(2) *Toute réunion* **finie** *de fermés est un fermé.*

DÉMONSTRATION.

(1) Soit $\{F_i,\ i \in I\}$ une famille de fermés. Soit $F = \bigcap_{i\in I} F_i$. On a donc $E\backslash F = \bigcup_{i\in I}(E\backslash F_i)$. Les $E\backslash F_i$ sont des ouverts. D'après Proposition 3.3 (1), leur réunion est un ouvert. Donc F est un fermé.
(2) Soient $F_1, \dots, F_n$ des fermés. Soit $F = \bigcup_{i=1}^n F_i$. On a donc $E\backslash F = \bigcap_{i=1}^n (E\backslash F_i)$. Les $(E\backslash F_i)$ sont des ouverts. D'après Proposition 3.3 (2), $E\backslash F$ est un ouvert donc F est un fermé.

■

PROPOSITION 3.8. *Pour tout $a \in E$ et $r > 0$,*

(1) *$B(a, r)$ est un ouvert de E.*
(2) *$E \setminus B'(a, r)$ est un ouvert de E.*
(3) *$B'(a, r)$ n'est pas un ouvert de E.*
(4) *$E \setminus B(a, r)$ n'est pas un ouvert de E.*
(5) *$B'(a, r)$ est un fermé E.*
(6) *$E \setminus B(a, r)$ est un fermé de E.*
(7) *$B(a, r)$ n'est pas un fermé de E.*
(8) *$E \setminus B'(a, r)$ n'est pas un fermé de E.*

DÉMONSTRATION.

(1) Soit $x \in B(a, r)$. On a $\|a - x\| < r$ et on peut poser $\varepsilon = r - \|a - x\| > 0$. Vérifions que $B(x, \varepsilon) \subset B(a, r)$. Soit $y \in B(x, \varepsilon)$. On a alors $\|x - y\| < \varepsilon$. Or
$$\|a - y\| = \|a - x + (x - y)\| \leqslant \|a - x\| + \|x - y\| < \|a - x\| + \varepsilon = r.$$
Donc $y \in B(a, r)$.
(2) Soit $x \in E\setminus B'(a, r)$. On a $\|a-x\| > r$ et on peut poser $\varepsilon = \|a-x\|-r > 0$. Vérifions que $B(x, \varepsilon) \subset E \setminus B'(a, r)$. Soit $y \in B(x, \varepsilon)$. On a alors $\|x - y\| < \varepsilon$. Or
$$\|a - y\| = \|a - x + (x - y)\| \geq \|a - x\| - \|x - y\| > \|a - x\| - \varepsilon = r.$$
Donc $y \in E \setminus B'(a, r)$.
(3) Soit $u \in E$ tel que $u \neq 0$ et $x = a + \frac{r}{\|u\|}u$. Alors $\|a - x\| = r$ et en particulier, $x \in B'(a, r)$. Montrons que pour tout $\varepsilon > 0$, $B(x, \varepsilon)$ n'est pas incluse dans $B'(a, r)$ en trouvant un y appartenant à $B(x, \varepsilon)$ et n'appartenant pas à $B'(a, r)$. Pour $\varepsilon > 0$, posons

$y = x + \frac{\varepsilon}{2r}(x-a)$. On a alors $\|x-y\| = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ et $\|y-a\| = \|(1+\frac{\varepsilon}{2r})(x-a)\| = (1+\frac{\varepsilon}{2r})\|a-x\| = (1+\frac{\varepsilon}{2r})r > r$.

(4) Soit $u \in E$ tel que $u \neq 0$ et $x = a + \frac{r}{\|u\|}u$. Alors $\|a-x\| = r$ et en particulier, $x \in E \setminus B(a,r)$. Montrons que pour tout $\varepsilon > 0$, $B(x,\varepsilon)$ n'est pas incluse dans $E \setminus B(a,r)$ en trouvant un y appartenant à $B(x,\varepsilon)$ et appartenant à $B(a,r)$. On peut supposer que $\varepsilon < 2r$, quitte à le remplacer par $\min(\varepsilon, r)$. On pose $y = x - \frac{\varepsilon}{2r}(x-a)$. On a alors $\|x-y\| = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ et $\|y-a\| = \|(1-\frac{\varepsilon}{2r})(x-a)\| = (1-\frac{\varepsilon}{2r})\|a-x\| = (1-\frac{\varepsilon}{2r})r < r$.

■

Définition 3.9 (Voisinage). Soit $a \in E$. On dit qu'un ensemble V est un voisinage de a s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(a,\varepsilon) \subset V$.

Un ouvert est donc un ensemble qui est un voisinage de chacun de ses points.

4. Intérieur, adhérence

Définition 4.1. − Soit $A \subset E$ et $a \in E$. On dit que a est un point intérieur à A s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(a,\varepsilon) \subset A$.

On appelle Intérieur de A l'ensemble de tous les points intérieurs à A et on le note $\mathring{A}$. L'intérieur de A est donc caractérisé par la propriété suivante :

$$x \in \mathring{A} \Longleftrightarrow \exists \varepsilon > 0 : B(a,\varepsilon) \subset A.$$

PROPOSITION 4.2.

i) *$\mathring{A}$ est un ouvert contenu dans A.*
ii) *Si O est un ouvert tel que $O \subset A$, alors $O \subset \mathring{A}$.*
iii) *A est ouvert si et seulement si $\mathring{A} = A$.*

DÉMONSTRATION.

i) Soit $a \in \mathring{A}$. Alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(a,\varepsilon) \subset A$. En particulier, $a \in B(a,\varepsilon)$ donc $a \in A$. De plus, $B(a,\varepsilon) \subset \mathring{A}$. En effet, soit $x \in B(a,\varepsilon)$. Comme $B(a,\varepsilon)$ est un ouvert, il existe $\varepsilon' > 0$ tel que $B(x,\varepsilon') \subset B(a,\varepsilon) \subset A$ donc $x \in \mathring{A}$.
ii) Soit O un ouvert contenu dans A. Pour tout $a \in O$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(a,\varepsilon) \subset O \subset A$. Donc $a \in \mathring{A}$.
iii) D'après i), $\mathring{A} \subset A$. Si A est ouvert, alors d'après ii), on a $A \subset \mathring{A}$.

■

Remarque 4.3. D'après la dernière proposition (i) et ii), $\mathring{A}$ est le plus grand ouvert contenu dans A.

Définition 4.4. − Soit $A \subset E$. On appelle adhérence de A et on note $\overline{A}$ l'ensemble

$$\overline{A} = E \setminus \overbrace{E \setminus A}^{\circ}.$$

PROPOSITION 4.5.

i) *$\overline{A}$ est un fermé contenant A.*
ii) *Si F est un fermé tel que $A \subset F$, alors $\overline{A} \subset F$.*
iii) *A est fermé si et seulement si $\overline{A} = A$.*

DÉMONSTRATION.

i) $\overset{\circ}{\widehat{E \setminus A}}$ est un ouvert, donc $\overline{A} = E \setminus \overset{\circ}{\widehat{E \setminus A}}$ est fermé. De plus, d'après Proposition 4.2 i), $\overset{\circ}{\widehat{E \setminus A}} \subset E \setminus A$ ce qui équivalent à $A \subset E \setminus \overset{\circ}{\widehat{E \setminus A}} = \overline{A}$.
ii) Soit F est un fermé tel que $A \subset F$, alors $E \setminus F$ est un ouvert et $E \setminus F \subset E \setminus A$. On en déduit que $E \setminus F \subset \overset{\circ}{\widehat{E \setminus A}}$, ce qui est équivalent à $\overline{A} = E \setminus \overset{\circ}{\widehat{E \setminus A}} \subset F$.
iii) D'après i), $A \subset \overline{A}$. Si A est fermé, alors d'après ii) $\overline{A} \subset A$.

■

Remarque 4.6. D'après la dernière proposition i) et ii), $\overline{A}$ est le plus petit fermé contenant A.

PROPOSITION 4.7. *Soient A et B deux parties de A. Si $A \subset B$, alors $\overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$ et $\overline{A} \subset \overline{B}$.*

DÉMONSTRATION. $\overset{\circ}{A}$ est un ouvert et $\overset{\circ}{A} \subset A \subset B$. D'après la propriété ii) de Proposition 4.2, on a alors $\overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$.

$\overline{B}$ est un fermé et $A \subset B \subset \overline{B}$. D'après la propriété ii) de Proposition 4.5, on a alors $\overline{A} \subset \overline{B}$. ■

Définition 4.8 (Densité). Soit A une partie de E. On dit que A est dense dans E si $\overline{A} = E$.

Exemple 4.9 (Voir exercice 2.3). L'ensemble $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Définition 4.10 (Frontière). Soit $A \subset E$. On appelle frontière (ou bord) de A l'ensemble $\mathrm{Fr}(A) = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}$.

La proposition suivante nous donne une caractérisation de l'adhérence qui pourra nous être utile dans la suite du cours :

PROPOSITION 4.11. *Soit $A \subset E$.*

$$a \in \overline{A} \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0, B(a, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset.$$

DÉMONSTRATION. Par définition de l'adhérence et en passant aux complémentaires, on a

$$E \setminus \overline{A} = \overset{\circ}{\widehat{E \setminus A}}.$$

Ce qui se traduit par :

$$a \notin \overline{A} \Longleftrightarrow a \in \overset{\circ}{\widehat{E \setminus A}} \Longleftrightarrow \exists \varepsilon > 0, B(a, \varepsilon) \subset E \setminus A$$

et en prenant la négation, par

$$a \in \overline{A} \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0, B(a,\varepsilon) \not\subset E \setminus A \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0, B(a,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset.$$

■

Définition 4.12. – Soit $A \subset E$ et $a \in E$. On dit que a est un point adhérent à A si pour tout $\varepsilon > 0$, $B(a,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$.

$\overline{A}$ est donc l'ensemble de tous les points adhérents à A.

PROPOSITION 4.13. *Pour tout $a \in E$ et $r > 0$,*

- $\overset{\circ}{\widehat{B'(a,r)}} = B(a,r)$ *;*
- $\overline{B(a,r)} = B'(a,r)$.

DÉMONSTRATION.

- Montrons la double inclusion. On sait que $B(a,r)$ est un ouvert inclus dans $B'(a,r)$ donc $B(a,r) \subset \overset{\circ}{\widehat{B'(a,r)}}$.

  Réciproquement, $\overset{\circ}{\widehat{B'(a,r)}} \subset B'(a,r)$. Il reste à montrer que tout x tel que $\|x-a\| = r$ n'est pas un point intérieur à $B'(a,r)$. Pour $\varepsilon > 0$, on pose $y = x + \frac{\varepsilon}{2r}(x-a)$. Il vérifie $\|y-x\| = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ et $\|y-a\| = r + \frac{\varepsilon}{2} > r$ autrement dit $y \in B(x,\varepsilon)$ et $y \notin B'(a,r)$. Donc $B(x,\varepsilon) \not\subset B'(a,r)$.
- Montrons la double inclusion. On sait que $B'(a,r)$ est un fermé qui contient $B(a,r)$ donc $\overline{B(a,r)} \subset B'(a,r)$. Réciproquement, on a $B(a,r) \subset \overline{B(a,r)}$. Il reste à montrer que tout x tel que $\|x-a\| = r$ est un point adhérent à $B(a,r)$. Soit x tel que $\|x-a\| = r$ et soit $\varepsilon > 0$. On pose $\varepsilon' = \min(\varepsilon, 2r)$ et $y = x - \frac{\varepsilon'}{2r}(x-a)$. Il vérifie $\|y-x\| = \frac{\varepsilon'}{2} < \varepsilon$ et $\|y-a\| = r - \frac{\varepsilon'}{2} < r$ autrement dit $y \in B(x,\varepsilon) \cap B(a,r)$ donc $B(x,\varepsilon) \cap B(a,r) \neq \emptyset$.

■

PROPOSITION 4.14. *Soit $\|\cdot\|_1$ une autre norme sur E équivalente à $\|\cdot\|$. Alors*

i) *O est un ouvert dans $(E, \|\cdot\|)$ si et seulement si O est un ouvert dans $(E, \|\cdot\|_1)$.*

ii) *F est un fermé dans $(E, \|\cdot\|)$ si et seulement si F est un fermé dans $(E, \|\cdot\|_1)$.*

iii) *Les intérieurs et les adhérences d'un ensemble sont les mêmes pour les deux normes.*

DÉMONSTRATION. Il suffit de montrer i).

Pour $x \in E$ et $r > 0$, on notera $B_1(x,r) = \{x \in E \ : \ \|x-a\|_1 < r\}$.

Les deux normes étant équivalentes, il existe deux constantes $a, b > 0$ telles que pour tout $x \in E$,

$$a\|x\|_1 \leq \|x\| \leq b\|x\|_1.$$

Supposons que O est un ouvert dans $(E, \|\cdot\|)$. Pour tout $x \in O$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(x,\varepsilon) \subset O$. Si $\|y-x\|_1 < \frac{\varepsilon}{b}$, alors $\|y-x\| \leq b\|y-x\|_1 < \varepsilon$. Nous avons alors $B_1(x, \frac{\varepsilon}{b}) \subset B(x,\varepsilon) \subset O$. Donc O est un ouvert dans $(E, \|\cdot\|_1)$.

Réciproquement, supposons que O est un ouvert dans $(E, \|\cdot\|_1)$. Pour tout $x \in O$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B_1(x,\varepsilon) \subset O$. Si $\|y-x\| < a\varepsilon$, alors $\|y-x\|_1 \leq \frac{1}{a}\|y-x\| < \varepsilon$. Nous avons alors $B(x, a\varepsilon) \subset B_1(x,\varepsilon) \subset O$. Donc O est un ouvert dans $(E, \|\cdot\|_1)$.

■

5. Suites dans un e.v.n.

Définition 5.1. On appelle *suite de E* toute application

$$\begin{aligned} u : \mathbb{N} &\longrightarrow E \\ n &\longmapsto u_n \end{aligned}$$

Cette suite sera notée $(u_n)_{n\geq 0}$.

Remarque 5.2. Parfois, u_n n'est défini qu'à partir d'un certain rang $p \in \mathbb{N}$. On notera alors $(u_n)_{n\geq p}$.

Définition 5.3. On dit qu'une e suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E est convergente s'il existe $l \in E$ tel que

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, N_\varepsilon \in \mathbb{N} \mid \forall\, n \geqslant N_\varepsilon,\ \|u_n - l\| < \varepsilon.$$

PROPOSITION 5.4. *Si une telle limite ℓ existe, alors elle est unique.*
Cet élément ℓ s'appelle alors limite de la suite (u_n) et on note $\lim_{n\to\infty} u_n = \ell$ *ou* $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$.

DÉMONSTRATION.
Supposons par l'absurde qu'il existe deux éléments distincts l et l_1 vérifiant la définition cidessus. Alors $\varepsilon = \frac{\|l-l_1\|}{4} > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $\|u_n - l\| \leq \varepsilon$ et il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_1$, $\|u_n - l_1\| \leq \varepsilon$. Pour tout $n \geq \max(N, N_1)$, on a alors

$$\|l - l_1\| = \|l - u_n + u_n - l_1\| \leq \|l - u_n\| + \|u_n - l_1\| < 2\varepsilon = \frac{\|l - l_1\|}{2}.$$

D'où la contradiction. ■

Remarque 5.5. D'après la définition de la convergence, il est clair que $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers l si et seulement si la suite numérique $(\|u_n - l\|)_{n\geq 0}$ converge vers 0.

PROPOSITION 5.6. *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites d'éléments de E, $\lambda \in \mathbb{R}$. On suppose que* $\lim_{n\to\infty} u_n = \ell_1$ *et* $\lim_{n\to\infty} v_n = \ell_2$. *Alors la suite $(u_n + \lambda v_n)_n$ converge vers $\ell_1 + \lambda\ell_2$.*

DÉMONSTRATION. On peut supposer $\lambda \neq 0$ sinon le résultat est trivial. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_1$, $\|u_n - l_1\| < \frac{\varepsilon}{2}$ et il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_2$, $\|v_n - l_2\| < \frac{\varepsilon}{2|\lambda|}$. Alors, pour tout $n \geq \max(N_1, N_2)$, on a

$$\|u_n - \lambda v_n - (l_1 + \lambda l_2)\| \leq \|u_n - l_1\| + |\lambda|\|v_n - l_2\| < \frac{\varepsilon}{2} + |\lambda|\frac{\varepsilon}{2|\lambda|} = \varepsilon.$$

■

PROPOSITION 5.7. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E. Si* $\lim_{n\to\infty} u_n = \ell$, *alors* $\lim_{n\to\infty} \|u_n\| = \|\ell\|$.

DÉMONSTRATION.
Pour tout n, on a
$$|\|u_n\| - \|l\|| \leq \|u_n - l\|.$$
Comme $\|u_n - l\|$ tend vers 0, on en déduit que $|\|u_n)| - \|l\||$ tend vers 0, autrement dit que $\|u_n\|$ tend vers $\|l\|$. ■

Définition 5.8. Soit $u = (u_n)_{n\geq 0}$ une suite de E. On appelle *suite extraite de u* (ou *sous-suite*) toute application $u \circ \varphi$ où $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ est une application strictement croissante. On note $(u_{\varphi(n)})_{n\geq n_0}$ la suite extraite.

LEMME 5.9. *Soit $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une application strictement croissante. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\phi(n) \geq n$. En particulier, $\phi(n) \to_{n\to+\infty} +\infty$*

DÉMONSTRATION. On raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.
- $n = 0$: Evident car $\phi(0) \in \mathbb{N}$.
- Supposons $\phi(n) \geq n$. Comme ϕ est strictement croissante, on a $\phi(n+1) > \phi(n)$ donc $\phi(n+1) \geq \phi(n) + 1 \geq n + 1$.

■

THÉORÈME 5.10. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E qui converge vers ℓ. Alors toute suite extraite de (u_n) converge vers la même limite ℓ.*

DÉMONSTRATION. Soit $(u_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ une suite extraite. Soit $\varepsilon > 0$. Par convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on a $\|u_n - l\| < \varepsilon$.
D'après le lemme précédent, pour $n \geq N$, on a $\phi(n) \geq n \geq N$. D'où
$$\|u_{\phi(n)} - l\| < \varepsilon.$$
■

Définition 5.11. Soit A une partie de E. On appelle suite d'éléments de A une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ de E telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in A$.

Le téorème suivant caractérise l'adhérence d'un ensemble en utilisant les suites.

THÉORÈME 5.12. *Soient $A \subset E$ et $x \in E$. Alors $x \in \overline{A}$ si et seulement si il existe une suite d'éléments de A qui converge vers x.*

DÉMONSTRATION.
$\Leftarrow$: On suppose qu'il existe une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que
$\forall\, n \in \mathbb{N},\ v_n \in A$ et $v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$.
Soit $\varepsilon > 0$. Il existe alors $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $\forall\, n \geqslant N$, $\|v_n - x\| \leqslant \varepsilon$.

On a alors $\{v_n,\ n \geqslant N\} \subset B(x, \varepsilon) \cap A$, d'où $B(x, \varepsilon) \cap A \neq \varnothing$ et d'après Proposition 4.11, $x \in \overline{A}$.

$\Rightarrow$ On suppose que $x \in \overline{A}$. Alors d'après Proposition 4.11, $\forall\, \varepsilon > 0,\ B(x, \varepsilon) \cap A \neq \varnothing$.
En particulier : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \exists\, x_n \in B(x, \frac{1}{n}) \cap A$. On construit ainsi une $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

d'éléments de A qui vérifie : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \|x_n - x\| < \frac{1}{n}$.
Donc $\|x_n - x\| \to 0$ autrement dit, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers x.

■

COROLLAIRE 5.13. *Soit A une partie de E. A est un fermé si et seulement si pour toute suite $(u_n)_{n\geq 0}$ d'éléments de A convergente,* $\lim_{n\to\infty} u_n \in A$.

DÉMONSTRATION.
$\Rightarrow$: On suppose A fermé. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de A convergente. Posons $x = \lim_{n\to\infty} u_n$.
D'après le théorème précédent, $x \in \overline{A}$. Mais comme A est fermé, $A = \overline{A}$. Donc $x \in A$.
$\Leftarrow$: On a toujours $A \subset \overline{A}$. Montrons que $\overline{A} \subset A$. Soit $x \in \overline{A}$. D'après le théorème précédent, il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A telle que $x = \lim_{n\to\infty} u_n$. Par hypothèse, $x \in A$.

■

Définition 5.14. On dit qu'une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est bornée s'il existe $M \geq 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|u_n\| \leq M$.

PROPOSITION 5.15. *Toute suite de E convergente est bornée.*

DÉMONSTRATION. Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite de E convergente. Posons $l = \lim_{n\to\infty} u_n$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $\|u_n - l\| < 1$. Donc pour tout $n \geq N$,

$$\|u_n\| = \|u_n - l + l\| \leq \|u_n - l\| + \|l\| < 1 + \|l\|.$$

En posant $M = \max(1 + \|l\|, \max_{n=0,\dots,N-1} \|u_n\|)$, on a $\|u_n\| \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. ■

PROPOSITION 5.16. *Soient $\|\cdot\|_1$ une norme équivalente à $\|\cdot\|$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E. On a alors équivalence entre*

- (u_n) *converge vers* $\ell \in E$ *dans* $(E, \|\cdot\|)$
- (u_n) *converge vers* $\ell \in E$ *dan* $(E, \|\cdot\|_1)$

DÉMONSTRATION. Par équivalence des normes, il existe deux constantes : $a, b > 0$ telles que

$$\forall\, x \in E, \quad a\,\|x\|_1 \leqslant \|x\| \leqslant b\,\|x\|_1.$$

On suppose que (u_n) converge vers ℓ dans $(E, \|\cdot\|)$. Soit $\varepsilon > 0$. Alors $\exists\, N \in \mathbb{N},\ \forall\, n \geqslant N,\ \|u_n - \ell\| < a\varepsilon$. Donc pour $n \geqslant N,\ \|u_n - \ell\|_1 \leqslant \frac{1}{a}\|u_n - \ell\| < \varepsilon$.
Il s'ensuit que $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$ dans $(E, \|\cdot\|_1)$.

Réciproquement, supposons que (u_n) converge vers ℓ dans $(E, \|\cdot\|_1)$. Soit $\varepsilon > 0$. Alors $\exists\, N \in \mathbb{N},\ \forall\, n \geqslant N,\ \|u_n - \ell\|_1 < \frac{\varepsilon}{b}$. Donc pour $n \geqslant N,\ \|u_n - \ell\| \leqslant b\|u_n - \ell\| < \varepsilon$.
Il s'ensuit que $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$ dans $(E, \|\cdot\|)$. ■

PROPOSITION 5.17. *Soient $E_1, \dots, E_p$ des espaces vectoriels munis respectivement des normes $N_1, \dots, N_p$. On considère l'espace produit $E = E_1 \times \dots \times E_p$, muni de la norme*

$$N(x_1, \dots, x_p) = \max(N_1(x), \dots, N_p(x_p)).$$

Soit $l = (l_1, \dots, l_p)$ avec $l_i \in E_i$ pour $i = 1, \dots p$.
Pour $i = 1, \dots p$, soit une suite $(u_n^i)_n$ déléments de E_i. On considère la suite déléments de E $(u_n)_n$ définie par $u_n = (u_n^1, \dots, u_n^p)$.

Alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$ e si et seulement si pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$, $\lim_{n\to+\infty} u_n^i = l_i$.

DÉMONSTRATION. On a
$\lim_{n\to+\infty} u_n = l \iff$
$\lim_{n\to+\infty} N(u_n - l) = 0 \iff$
$\lim_{n\to+\infty} \max(N_1(u_n - l), \dots, N_p(u_n - l)) = 0 \iff$
$\forall i \in \{1, \dots, p\}, \lim_{n\to+\infty} N_i(u_n - l) = 0 \iff$
$\forall i \in \{1, \dots, p\}, \lim_{n\to+\infty} u_n^i = l_i$.

■

6. Compacts

Définition 6.1. – Soit K une partie de E. On dit que K est un compact si toute suite d'éléments de K admet une suite extraite qui converge vers un élément de K.

On rappelle le théorème de Bolzano-Weierstrass vu en L1 :

THÉORÈME 6.2. *Toute suite bornée de $\mathbb{R}$ admet une suite extraite convergente.*

COROLLAIRE 6.3. *Dans $\mathbb{R}$, tout intervalle de la forme $[a, b]$ est un compact.*

DÉMONSTRATION. Soit $(x_n)_n$ une suite d'éléments de $[a, b]$. Comme cette suite est bornée, par le thérorème de Bolzano-Weierstrass, elle admet une suite extraite $(x_{\phi(n)})_n$ qui converge vers un élément $x \in \mathbb{R}$. Comme pour tout n, $a \leq x_{\phi(n)} \leq b$, on a aussi $a \leq x \leq b$ c'est à dire $x \in [a, b]$. ■

Définition 6.4. – On dit qu'une partie A de E est *bornée* s'il existe $M \geq 0$ tel que, pour tout $x \in A$, $\|x\| \leq M$.

Autrement dit, A est bornée s'il existe une boule $B'(0, M)$ qui contient A.

THÉORÈME 6.5. – *Si K est un compact de E, alors il est fermé et borné dans E.*

DÉMONSTRATION. Soit K un compact de E.
• Montrons d'abord que K est un fermé. Soit $(x_n)_n$ une suite d'éléments de K qui converge vers $x \in E$. K étant compact, il existe une suite extraite $(x_{\varphi(n)})_n$ qui converge vers un élément $x' \in K$. Mais $(x_{\varphi(n)})_n$ converge vers la même limite que $(x_n)_n$, à savoir x. Par unicité de la limite, $x' = x$, donc $x \in K$.
• Montrons maintenant que K est borné. Supposons par l'absurde qu'il ne l'est pas. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \in K$ tel que $\|x_n\| \geqslant n$. On considère la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. C'est une suite d'éléments de K, donc elle admet une suite extraite $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers un élément $x \in K$.
Pour tout $n \geqslant \|x\| + 1$, on a :

$$\|x_{\varphi(n)} - x\| \geqslant \|x_{\varphi(n)}\| - \|x\| \geqslant \varphi(n) - \|x\| \geqslant \|x\| + 1 - \|x\| \geq 1.$$

On obtient une contradiction avec le fait que $x_{\varphi(n)} - x$ tend vers 0.

■

THÉORÈME 6.6. – *Soient K un compact et F un fermé tels que $F \subset K$. Alors F est un compact.*

DÉMONSTRATION. Soit $(x_n)_n$ une suite d'éléments de F. En particulier, c'est une suite d'éléments de K puisque $F \subset K$. Il existe alors une suite extraite $(x_{\varphi(n)})_n$ de $(x_n)_n$ qui converge vers un élément $x \in K$. Comme F est fermé, $x \in F$. ■

PROPOSITION 6.7. – *Soient E_1 et E_2 deux espaces vectoriels munis respectivement des normes N_1 et N_2. On considère l'espace produit $E = E_1 \times E_2$ muni de la norme définie par $N(x_1, x_2) = \max(N_1(x_1), N_2(x_2))$. Si K_1 un compact de E_1 et K_2 un compact de E_2. alors $K = K_1 \times K_2$ est un compact de E.*

DÉMONSTRATION. Soit une suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de K. Elle est de la forme $w_n = (u_n, v_n)$ où $(u_n)_n$ est une suite d'éléments de K_1 et $(v_n)_n$ une suite d'éléments de K_2. Comme K_1 est compact, la suite $(u_n)_n$ admet une suite extraite $(u_{\varphi(n)})_n$ qui converge vers un élément $u \in K_1$. Comme K_2 est compact, la suite $(v_{\varphi(n)})_n$ admet une suite extraite $(v_{\varphi\circ\psi(n)})_n$ qui converge vers un élément $v \in K_2$.
On a $(u_{\varphi\circ\psi(n)})_n$ qui converge vers u et $(v_{\varphi\circ\psi(n)})_n$ qui converge vers v donc $(w_{\varphi\circ\psi(n)})_n$ converge vers $w = (u, v)$. Mais $u \in K_1$ et $v \in K_2$ donc $w \in K$. ■

PROPOSITION 6.8. – *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $E_1, \dots, E_n$ des espaces vectoriels munis respectivement des normes $N_1, \cdots, N_n$. On considère l'espace produit $E = E_1 \times \cdots \times E_n$ muni de la norme N définie par $N(x_1, \dots, x_n) = \max(N_1(x_1), \dots, N_n(x_n))$.*

Pour tout $i \in \{1, \cdots, d\}$, Soit K_i un compact de E_i. Alors $K = K_1 \times \cdots \times K_n$ est un compact de E.

DÉMONSTRATION. On procède par récurrence sur n.
Le résultat est trivial pour $n = 1$.
On suppose le résultat vrai au rang n. Soient $E_1, \dots, E_{n+1}$ des espaces vectoriels munis respectivement des normes $N_1, \cdots, N_n, N_{n+1}$. On pose $E = E_1 \times \cdots \times E_n \times E_{n+1}$. D'après l'hypothèse de récurrence, $K_1 \times \cdots \times K_n$ est un compact de $E_1 \times \cdots \times E_n$ et d'après la proposition précédente, $K_1 \times \cdots \times K_n \times K_{n+1} = (K_1 \times \cdots \times K_d) \times K_{n+1}$ est un compact de E. ■

THÉORÈME 6.9. *On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Les boules fermées sont des compacts de $\mathbb{R}^n$.*

DÉMONSTRATION. Soit $B'(a, R)$ la boule fermée de centre a et de rayon $R > 0$. On a

$$B'(a, R) = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \forall\, 1 \leqslant i \leqslant n,\ |x_i - a_i| \leqslant R\} = [-R + a_1, R + a_1] \times \cdots \times [-R + a_n, R + a_n].$$

Pour chaque $i \in \{1, \cdots, n\}$, $[-R + a_i, R + a_i]$ est un compact de $\mathbb{R}$ d'après le corollaire 6.3. D'après la proposition 6.8, $B'(a, R)$ est une compact de $\mathbb{R}^n$. ■

THÉORÈME 6.10. – *On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$.*
Un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ est compact si et seulement si il est fermé et borné.

DÉMONSTRATION.

"$\Rightarrow$" : vrai dans tout espace vectoriel normé.

"$\Leftarrow$" : vrai en dimension finie.

Soit $A \subset \mathbb{R}^n$ tel que A soit fermé et borné dans $\mathbb{R}^n$. Alors $\exists\ R > 0 \mid A \subset B'(0, R)$. A est un fermé inclus dans le compact $B'(0, R)$.
On en déduit que A est un compact.

■

Remarque 6.11.

Dans $\mathbb{R}^n$, on verra que toutes les normes sont équivalentes. Comme la convergence des suites ne dépend pas des normes équivalentes, ce théorème est vrai pour n'importe quelle autre norme sur $\mathbb{R}^n$.