Chapitre 3 : Applications continues entre espaces vectoriels normés

Dans tout ce chapitre, E désigne un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, non réduit à $\{0\}$, muni d'une norme $\|\cdot\|_E$ et F un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'une norme $\|\cdot\|_F$.

Pour $a \in E$, $b \in F$ et $r > 0$, on notera

- $B_E(a,r) = \{x \in E \ : \ \|x-a\|_E < r\}$;
- $B'_E(a,r) = \{x \in E \ : \ \|x-a\|_E \leq r\}$;
- $B_F(b,r) = \{y \in F \ : \ \|y-b\|_F < r\}$;
- $B'_F(b,r) = \{y \in F \ : \ \|y-b\|_F \leq r\}$;

1. Limite en un point

Définition 1.1. Soient $A \subset E$ et $a \in \overline{A}$. Soient $f : A \longrightarrow F$ une application et $l \in F$. On dit que f *admet pour limite* l *au point* a si :

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \eta > 0\ : (x \in A \text{ et } \|x-a\|_E < \eta) \Rightarrow \|(f(x) - l\|_F < \varepsilon).$$

Si un tel élément l existe, alors il est unique. On l'appelle alors limite de f au point a et on note $\lim_{x\to a} f(x) = l$ ou $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} l$.

DÉMONSTRATION DE L'UNICITÉ.

On suppose qu'il existe $l' \neq l$ vérifiant la définition. Soit $\varepsilon = \frac{\|l-l'\|_F}{4}$ (> 0).
$\exists\, \eta_1 > 0 \mid \forall x \in A, \|x-a\|_E < \eta_1 \Rightarrow \|f(x) - l\|_F < \varepsilon$.
$\exists\, \eta_2 > 0 \mid \forall x \in A, \|x-a\|_E < \eta_2 \Rightarrow \|f(x) - l'\|_F < \varepsilon$.
On pose $\eta = \min(\eta_1, \eta_2)$. Alors pour tout $x \in A$ tel que $\|x-a\|_E < \eta$, on a $\|f(x) - l\|_F < \varepsilon$ et $\|f(x) - l'\|_F < \varepsilon$.
On obtient alors

$$\|l-l'\|_F = \|l - f(x) + f(x) - l'\|_F \leqslant \|f(x) - l\|_F + \|f(x) - l'\|_F < 2\varepsilon = \frac{\|l-l'\|_F}{2}.$$

C'est impossible. ■

Remarque 1.2. Si A est un ouvert et si $a \in A$, pour η assez petit, on a $\|x-a\|_E < \eta \Rightarrow x \in A$. La définition s'écrit alors simplement :

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \eta > 0\ :\ \|x-a\|_E < \eta \Rightarrow \|f(x) - l\|_F < \varepsilon.$$

PROPOSITION 1.3. *Soient $A \subset E$, $a \in \overline{A}$ et $f : A \longrightarrow F$. Alors f admet pour limite l au point a si et seulement si pour toute suite $(u_n)_n$ d'éléments de A telle que $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$, la suite $f(u_n)$ tend vers l.*

DÉMONSTRATION.

$\Rightarrow$. On suppose que f admet pour limite l au point a. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de A telle que $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$. Soit $\varepsilon > 0$.
$\exists\, \eta > 0 \mid \forall x \in A, \|x-a\|_E < \eta \Rightarrow \|f(x)-l\|_F > \varepsilon.$
$\exists\, N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall\, n \geqslant N,\ \|u_n - a\|_E < \eta.$
Donc pour tout $n \geqslant N$, on a $\|f(u_n)-l\|_F < \varepsilon$.

$\Leftarrow$: On démontre la contraposée. Supposons que f n'admet pas pour limite l au point a. Alors $\exists\, \varepsilon > 0 \mid \forall\, \eta > 0,\ \exists\, x \in A$ avec $\|x-a\|_E < \eta$ et $\|f(x)-l\|_F \geqslant \varepsilon$. En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\exists\, u_n \in A$ avec $\|u_n - a\|_E < \frac{1}{n}$ et $\|f(u_n)-l\|_F \geqslant \varepsilon$. On a donc $u_n \to a$ mais $\|f(u_n)-l\|_F$ ne tend pas vers 0, c'est-à-dire $f(u_n)$ ne converge pas vers l. ■

PROPOSITION 1.4 (Opérations algébriques). *Soient $A \subset E$, $a \in \overline{A}$. Soient $f, g : A \longrightarrow F$ deux applications. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, l_1 et l_2 deux éléments de F. On suppose que* $\lim_{x\to a} f(x) = l_1$ *et* $\lim_{x\to a} g(x) = l_2$. *Alors*
$$\lim_{x\to a} (\lambda f + g)(x) = \lambda l_1 + l_2.$$

DÉMONSTRATION.
Utilisons la proposition 1.3. Soit $(u_n)_n$ une suite d'éléments de A qui converge vers a. Alors $\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = l_1$ et $\lim_{n\to+\infty} g(u_n) = l_2$. d'après les opérations sur les limites, on a $\lim_{n\to+\infty} \lambda f(u_n) + g(u_n) = \lambda l_1 + l_2$. ■

PROPOSITION 1.5. *Soient $A \subset E$ et $a \in \overline{A}$. Soient $f : A \longrightarrow F$ une application et $l \in F$. Si* $\lim_{x\to a} f(x) = l$, *alors* $\lim_{x\to a} \|f(x)\| = \|l\|$.

DÉMONSTRATION. Utilisons la proposition 1.3. Soit $(u_n)_n$ une suite d'éléments de A qui converge vers a. Alors $\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = l$ Alors pour tout n,
$$|\|f(u_n)\| - \|l\|| \leq \|f(u_n) - l\|.$$
Comme $\|f(u_n) - l\|$ tend vers 0, on en déduit que $|\|f(u_n)\| - \|l\||$ tend vers 0, autrement dit que $\|f(u_n)\|$ tend vers $\|l\|$. ■

PROPOSITION 1.6 (composée). *Soient $A \subset E$, $B \subset F$, $a \in \overline{A}$, $b \in \overline{B}$, G un espace vectoriel normé et $l \in G$.*
Soient $f : A \longrightarrow F$ et $g : B \longrightarrow G$ deux applications telles que $f(A) \subset B$. Si $\lim_{x\to a} f(x) = b$ *et* $\lim_{y\to b} g(y) = l$, *alors* $\lim_{x\to a} (g\circ f)(x) = l$.

DÉMONSTRATION.
Soit $(u_n)_n$ une suite d'éléments de A qui converge vers a. Alors $\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = b$. Comme $(f(u_n))_n$ est une suite de B qui converge vers b, on a $\lim_{n\to+\infty} g(f(u_n)) = l$. ■

PROPOSITION 1.7. *Soient $F_1, \dots, F_p$ des espaces vectoriels munis respectivement des normes $N_1 \dots, N_p$. On considère l'espace produit $F = F_1 \times \cdots \times F_p$, muni de la norme*
$$N(y_1, \dots, y_p) = \max(N_1(y_1), \dots, N_p(y_p)).$$
Soit $l = (l_1, \dots, l_p)$ avec $l_i \in F_i$ pour $i = 1, \dots p$. Soient $A \subset E$, $a \in \bar{A}$ et une application
$$\begin{aligned} f :\ & A \longrightarrow F \\ & x \longmapsto (f_1(x), \dots, f_p(x)) \end{aligned}$$

où pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$, $\quad \begin{array}{rl} f_i : & A \longrightarrow F_i \\ & x \longmapsto f_i(x) \end{array}$

Alors $\lim_{x \to a} f(x) = l$ *si et seulement si pour tout* $i \in \{1, \dots, p\}$, $\lim_{x \to a} f_i(x) = l_i$.

DÉMONSTRATION.
$\lim_{x \to a} f(x) = l$
$\Longleftrightarrow$ pour toute suite $(u_n)_n$ telle que $u_n \xrightarrow[n \to \infty]{} a$, $f(u_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} l$
$\Longleftrightarrow$ pour toute suite $(u_n)_n$ telle que $u_n \xrightarrow[n \to \infty]{} a$, $\forall\, i \in \{1, \dots, p\}$, $\lim_{n \to +\infty} f_i(u_n) = l_i$
$\Longleftrightarrow \forall\, i \in \{1, \dots, p\},\ \lim_{n \to +\infty} f_i(x) = l_i$. ■

2. Continuité en un point

Définition 2.1. Soient $A \subset E$ et $a \in A$. Soit $f : A \longrightarrow F$ une application. On dit que f est *continue au point* a si :

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \eta > 0\ :\ (x \in A \text{ et } \|x - a\|_E < \eta) \Rightarrow (\|f(x) - f(a)\|_F < \varepsilon).$$

Autrement dit, f est continue au point a si et seulement si $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Remarque 2.2. Si A est un ouvert, il existe η_0 tel que $\|x - a\| < \eta_0 \Rightarrow x \in A$. Quitte à remplacer η par $\min(\eta, \eta_0)$, le définition de la continuité de f en a s'écrit alors :

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \eta > 0\ :\ \|x - a\|_E < \eta \Rightarrow \|f(x) - f(a)\|_F < \varepsilon.$$

Les propositions démontrées dans le paragraphe sur les limites donnent directement les suivantes :

PROPOSITION 2.3. *Soient* $A \subset E$*,* $a \in A$ *et* $f : A \longrightarrow F$*. Alors* f *est continue en* a *si et seulement si pour toute suite* $(u_n)_n$ *d'éléments de* A *telle que* $u_n \xrightarrow[n \to \infty]{} a$*, la suite* $f(u_n)$ *tend vers* $f(a)$*.*

PROPOSITION 2.4. *[Opérations algébriques]*
Soient $A \subset E$ *et* $a \in A$*. Soient* $f, g : A \longrightarrow F$ *deux applications et* $\lambda \in \mathbb{R}$*. On suppose que* f *et* g *sont continues en* a*, alors* $\lambda f + g$ *est continue en* a*.*

PROPOSITION 2.5. *[composée] Soient* $A \subset E$*,* $B \subset F$*,* $a \in A$ *et* G *un espace vectoriel normé. Soient* $f : A \longrightarrow F$ *et* $g : B \longrightarrow G$ *deux applications telles que* $f(A) \subset B$*. Si* f *est continue en* a *et* g *est continue en* $f(b)$*, alors* $g \circ f$ *est continue en* a*.*

PROPOSITION 2.6. *Soient* $F_1, \dots, F_p$ *des espaces vectoriels munis respectivement des normes* $N_1 \dots, N_p$*. On considère l'espace produit* $F = F_1 \times \cdots \times F_p$*, muni de la norme*

$$N(y_1, \dots, y_p) = \max(N_1(y_1), \dots, N_p(y_p)).$$

Soient $A \subset E$*,* $a \in A$ *et une application*

$$\begin{array}{rl} f : & A \longrightarrow F \\ & x \longmapsto (f_1(x), \dots, f_p(x)) \end{array}$$

où pour tout $i \in \{1,\dots,p\}$, $\quad \begin{array}{rl} f_i : & A \longrightarrow F_i \\ & x \longmapsto f_i(x) \end{array}$

Alors f est continue au point a si et seulement si pour tout $i \in \{1,\dots,p\}$, f_i est continue au point a.

3. Continuité sur un ensemble

Définition 3.1. Soit $A \subset E$ et $f : A \longrightarrow F$. On dit que f est continue sur A si f est continue en tout point de A.

En appliquant les propositions 2.4 , 2.5 et 2.6 en tout point, on obtient :

PROPOSITION 3.2 (Opérations algébriques). *Soient $A \subset E$. Soient $f, g : A \longrightarrow F$ deux applications. Si f et g sont continues sur A, alors $\lambda f + g$ est continue sur A.*

PROPOSITION 3.3 (composée).
Soient $A \subset E$, $B \subset F$ et G un espace vectoriel normé. Soient $f : A \longrightarrow F$ et $g : B \longrightarrow G$ deux applications telles que $f(A) \subset B$. Si f est continue sur A et g est continue sur $f(B)$, alors $g \circ f$ est continue sur A.

PROPOSITION 3.4.
Soient $F_1, \dots, F_p$ des espaces vectoriels munis respectivement des normes $N_1 \dots, N_p$. On considère l'espace produit $F = F_1 \times \cdots \times F_p$, muni de la norme

$$N(y_1, \dots, y_p) = \max(N_1(y), \dots, N_p(y)).$$

Soient $A \subset E$ et une application

$$\begin{array}{rl} f : & A \longrightarrow F \\ & x \longmapsto (f_1(x), \dots, f_p(x)) \end{array}$$

où pour tout $i \in \{1,\dots,p\}$, $\quad \begin{array}{rl} f_i : & A \longrightarrow F_i \\ & x \longmapsto f_i(x) \end{array}$

Alors f est continue sur A si et seulement si pour tout $i \in \{1,\dots,p\}$, f_i est continue sur A.

Exemple. On considère $E = \mathbb{R}^2$ muni d'une des normes usuelles et l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x, y) = (x^3 + y^2, e^x + y).$$

La continuité de f est équivalente à la continuité des deux applications $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et $f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définies par

$$f_1(x, y) = x^3 + y^2; \;\; f_2(x, y) = e^x + y.$$

Définition 3.5 (Continuité uniforme). − Soit $A \subset E$ et $f : A \longrightarrow F$. On dit que f est *uniformément continue sur A* si :

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \eta > 0 \mid \forall\, x, y \in A,\ \|x - y\|_E < \eta \Rightarrow \|f(x) - f(y)\|_F < \varepsilon.$$

Remarque 3.6. Contrairement à la définition de la continuité, η ne dépend que de ε, mais pas x.

Remarque 3.7. D'après la définition, il est clair que si f est uniformément continue sur A, alors f est continue sur A. La réciproque n'est pas vraie en général.

Contre-exemple en exercice : Montrer que $f(x) = x^2$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Définition 3.8.
- Soit $A \subset E$, et $f : A \longrightarrow F$ une application. On appelle image de A par f l'ensemble
$$f(A) = \{y \in F : \exists x \in A \text{ tel que } f(x) = y\}.$$
- $f : E \longrightarrow F$ une application et $C \subset F$. On appelle image réciproque de C l'ensemble
$$f^{-1}(C) = \{x \in A : f(x) \in C\}.$$

Remarque 3.9. Attention, si f n'est pas bijective, l'application réciproque f^{-1} n'existe pas mais l'image réciproque d'un ensemble est quand même bien définie.

PROPOSITION 3.10. *Pour tout $C \subset F$, on a $f^{-1}(F \setminus C) = E \setminus f^{-1}(C)$.*

DÉMONSTRATION.
On a vu que $x \in f^{-1}(C) \iff f(x) \in C$ ce qui est équivalent à $f(x) \notin C \iff x \notin f^{-1}(C)$. Donc
$x \in f^{-1}(F \setminus C) \iff f(x) \in F \setminus C \iff f(x) \notin C \iff x \notin f^{-1}(C) \iff x \in E \setminus f^{-1}(C)$. ■

THÉORÈME 3.11. – *Soit $f : E \longrightarrow F$ une application continue.*
i) *Si C est un ouvert de F, alors $f^{-1}(C)$ est un ouvert de E.*
ii) *Si C est un fermé de F, alors $f^{-1}(C)$ est un fermé de E.*

DÉMONSTRATION.
i) Supposons que C est un ouvert de F. Soit $x \in f^{-1}(C)$. Montrons qu'il existe $\eta > 0$ tel que $B_E(x, \eta) \subset f^{-1}(C)$.
On a $f(x) \in C$ et C est ouvert donc $\exists\, \varepsilon > 0$ tel que $B_F(f(x), \varepsilon) \subset C$.
Comme f est continue en x,
$\exists \eta > 0$ tel que $\|x' - x\|_E < \eta \Longrightarrow \|f(x') - f(x)\|_F < \varepsilon$.
Autrement dit,
$x' \in B_E(x, \eta) \Longrightarrow f(x') \in B_F(f(x), \varepsilon) \Longrightarrow f(x') \in C \iff x' \in f^{-1}(C)$.
On a donc $B_E(x, \eta) \subset f^{-1}(C)$.
ii) Supposons que C est un fermé de F. Alors $F \setminus C$ est un ouvert de F et d'après i) $E \setminus f^{-1}(C) = f^{-1}(F \setminus C)$ est un ouvert de E ce qui veut dire que $f^{-1}(C)$ est un fermé de E.

■

4. Continuité sur les compacts

THÉORÈME 4.1 (Théorème de Heine). *Soit K un compact et $f : K \to F$ une fonction continue sur K. Alors f est uniformément continue sur K.*

DÉMONSTRATION. Supposons que f n'est pas uniformément continue sur K. Alors, il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $\eta > 0$, il existe $x, y \in K$ tels que $\|x-y\|_E < \eta$ et $\|f(x)-f(y)\|_F \geq \varepsilon$. En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $x_n, y_n \in K$ tels que

$$\|x_n - y_n\|_E < \frac{1}{n}, \quad \|f(x_n) - f(y_n)\|_F \geq \varepsilon.$$

K étant un compact, il existe une suite extraite $(x_{\varphi(n)})_n$ qui converge vers un élément $x \in K$. On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\|x_{\varphi(n)} - y_{\varphi(n)}\|_E < \frac{1}{\varphi(n)}, \quad \|f(x_{\varphi(n)}) - f(y_{\varphi(n)})\|_F \geq \varepsilon.$$

Donc $x_{\varphi(n)} - y_{\varphi(n)} \to 0$ et $y_{\varphi(n)} = y_{\varphi(n)} - x_{\varphi(n)} + x_{\varphi(n)} \to x$. Par continuité de f au point x, les suites $f(x_{\varphi(n)})$ et $f(y_{\varphi(n)})$ convergent toutes les deux vers $f(x)$. Par passage à la limite dans l'inégalité

$$\|f(x_{\varphi(n)}) - f(y_{\varphi(n)})\|_F \geq \varepsilon,$$

on obtient $0 \geq \varepsilon$. D'où la contradiction. ■

THÉORÈME 4.2. – *Soit K un compact de E et $f : K \longrightarrow F$ une application continue. Alors $f(K)$ est un compact de F.*

DÉMONSTRATION. Nous allons montrer que toute suite d'éléments de $f(K)$ admet une suite extraite qui converge vers un élément de $f(K)$.

Soit $(y_n)_n$ une suite d'éléments de $f(K)$. Alors $\forall\, n,\ \exists\, x_n \in K\ :\ y_n = f(x_n)$.
$(x_n)_n$ est une suite déléments de K qui est compact. Elle admet donc une suite extraite $(x_{\varphi(n)})_n$ telle que $x_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} x \in K$.
Par continuité de f au point x, $y_{\varphi(n)} = f(x_{\varphi(n)}) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$.
Comme $x \in K$, $f(x) \in f(K)$. ■

Définition 4.3 (Bornée).
Soit $A \subset E$ et $f : A \to F$. On dit que f est bornée sur A si

$$\exists\, M \geq 0\ :\ \forall\, x \in A,\ \|f(x)\|_F \leqslant M.$$

Autement dit, f est bornée sur A si $f(A)$ est un ensemble borné de F.

Nous allons maintenant nous pencher sur le cas particulier où $F = \mathbb{R}$.

Définition 4.4 (Majorée, minorée).
Soit $A \subset E$ et $f : A \to \mathbb{R}$. On dit que f est

- minorée sur A si $\exists\, m_0 \in \mathbb{R}\ :\ \forall\, x \in A,\ f(x) \geqslant m_0$. Le nombre m_0 s'appelle alors un minorant de f sur A.
- majorée sur A si $\exists\, m_1 \in \mathbb{R}\ :\ \forall\, x \in A,\ f(x) \leqslant m_1$. Le nombre m_1 s'appelle alors un majorant de f sur A.

Remarque 4.5. f est bornée si et seulement si elle minorée et majorée. En effet si m_1 est un majorant de f sur A et m_0 est un minorant de f sur A, alors f est bornée par $M = \max(|m_0|, |m_1|)$. Réciproquement, si f est bornée par $M \geq 0$, alors elle est minorée par $-M$ est majorée par M.

Définition 4.6 (Sup, Inf).

Soit A une partie non vide de E.

- Supposons que f est majorée sur A. On définit

$$\sup_A f = \inf\{\text{majorants de } f \text{ sur } A\}.$$

C'est à dire c'est le nombre défini par :

$$\begin{cases} \forall\, x \in A,\ f(x) \leqslant \sup_A f \\ \forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, x_\varepsilon \in A\ :\ \sup_A f - \varepsilon < f(x_\varepsilon). \end{cases}$$

Parfois, on notera $\sup_{x \in A} f(x) = \sup_A$.

- Supposons que f est minorée sur A. On définit

$$\inf_A f = \sup\{\text{minorants de } f \text{ sur } A\}.$$

C'est le nombre défini par :

$$\begin{cases} \forall\, x \in A,\ f(x) \geqslant \inf_A f \\ \forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, x_\varepsilon \in A\ :\ \inf_A f + \varepsilon > f(x_\varepsilon). \end{cases}$$

- Si $\exists\, a \in A\ :\ \inf_A f = f(a)$, alors $f(a)$ est appelé $\min_A f$.

- Si $\exists\, b \in A\ :\ \sup_A f = f(b)$, alors $f(b)$ est appelé $\max_A f$.

THÉORÈME 4.7. – *Soient K un compact non vide de E et $f\ :\ K \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue sur K. Alors il existe $a \in K$ et $b \in K$ tel que pour tout $x \in K$,*

$$f(a) \leq f(x) \leq f(b).$$

Autrement dit $f(a) = \inf_A f = \min_A f$ et $f(b) = \sup_A f = \max_A f$.

DÉMONSTRATION. D'après le théorème précédent, $f(K)$ est un compact de $\mathbb{R}$. En particulier, il est borné donc minoré et majoré.

Montrons qu'il existe un élément b de K vérifiant $\sup_K f = f(b)$:
D'après les propriétés du sup,

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \exists\, x_n \in K \mid \sup_K f - \frac{1}{n} < f(x_n) \leqslant \sup_K f.$$

Par compacité de K, la suite $(x_n)_n$ admet une suite extraite $(x_{\varphi(n)})_n$ telle que $x_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} b \in K$
Par continuité de f au point b, $f(x_{\varphi(n)}) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(b)$.

$\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, on a alors

$$\sup_K f - \frac{1}{\varphi(n)} < f(x_{\varphi(n)}) \leqslant \sup_K f.$$

D'après le théorème des gendarmes, on obtient $f(x_{\varphi(n)}) \xrightarrow[n\to\infty]{} \sup_K f$. Et par unicité de la limite, on a $f(b) = \sup_K f$.

D'après les propriétés de l'inf, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \exists\, y_n \in K \mid \inf_A f \leq f(y_n) \leqslant \inf_A f + \frac{1}{n}$.
Par compacité de K, la suite $(y_n)_n$ admet une suite extraite $(y_{\phi(n)})_n$ telle que $y_{\phi(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} a \in K$
Par continuité de f au point a, $f(y_{\phi(n)}) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(a)$.
$\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, on a alors

$$\inf_K f \leq f(y_{\phi(n)}) < \inf_K f + \frac{1}{\phi(n)}.$$

D'après le théorème des gendarmes, on obtient $f(y_{\phi(n)}) \xrightarrow[n\to\infty]{} \inf_K f$. Et par unicité de la limite, on a $f(a) = \inf_K f$.

■

THÉORÈME 4.8. *Dans $\mathbb{R}^n$, toutes les normes sont équivalentes.*

DÉMONSTRATION.
Munissons $\mathbb{R}^n$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$ et considérons N une autre norme sur $\mathbb{R}^n$.
Par transitivité, il suffit de montrer que N est équivalente à $\|\cdot\|_\infty$.
Notons $e_1, \cdots, e_n$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
Pour tout $a = (a_1, \cdots, a_n) = \sum_{i=1}^n a_i e_i$ et pour tout $x = (x_1, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, on a

$$\begin{aligned}|N(x) - N(a)| \leq N(x-a) &= N\left(\sum_{i=1}^n (x_i - a_i)e_i\right)\\ &\leq \sum_{i=1}^n N((x_i - a_i)e_i)\\ &= \sum_{i=1}^n |x_i - a_i| N(e_i) \leq \|x-a\|_\infty \sum_{i=1}^n N(e_i).\end{aligned}$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, en posant $\eta = \varepsilon / \sum_{i=1}^n N(e_i)$, on a

$$\|x - a\|_\infty < \eta \Longrightarrow |N(x) - N(a)| < \varepsilon.$$

On a montré que l'application N est (uniformément) continue sur $\mathbb{R}^n$.
Considérons la sphère unité $S(0,1) = \{x \in \mathbb{R}^n,\ \|x\|_\infty = 1\} = B'(0,1) \cap (\mathbb{R}^n \setminus B(0,1))$. C'est un ensemble fermé et borné de $\mathbb{R}^n$, c'est donc un compact.
Comme N est continue sur $S(0,1)$ qui est compact, le théorème précédent donne l'existence de $a, b \in S(0,1)$ tels que, pour tout $x \in S(0,1)$,

$$N(a) \leq N(x) \leq N(b).$$

Or pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ avec $x \neq 0$, $\frac{1}{\|x\|_\infty} x \in S(0,1)$ car $\left\| \frac{1}{\|x\|_\infty} x \right\|_\infty = \frac{1}{\|x\|_\infty} \|x\|_\infty = 1$ donc

$$N(a) \leq N\left(\frac{1}{\|x\|_\infty} x\right) \leq N(b).$$

Or $N\left(\frac{1}{\|x\|_\infty} x\right) = \frac{1}{\|x\|_\infty} N(x)$, ce qui donne

$$N(a)\|x\|_\infty \leq N(x) \leq N(b)\|x\|_\infty.$$

Enfin, notons. que $N(a) > 0$ et $N(b) > 0$ puisque la sphère unité ne contient pas 0. Les deux normes sont bien équivalentes. ■

5. Applications lipschitzienne

Définition 5.1 (Lipschitzienne).
Soit $A \subset E$, $f : A \to F$ une application et $k \geq 0$. On dit que f est k-lipschtzienne sur A si

$$\forall x \in A, \forall y \in A, \ \ \|f(x) - f(y)\|_F \leq k\|x - y\|_E$$

On dit que f est lipschtzienne sur A s'il existe $k \geq 0$ tel que f est k-lipschitzienne sur A.

THÉORÈME 5.2. *Soit $A \subset E$ et $f : A \to F$ une application. Si f est lipschitzienne sur A, alors f est uniformément continue sur A.*

DÉMONSTRATION. Soit $\varepsilon > 0$. On pose $\eta = \frac{\varepsilon}{k+1}$. Pour tout $x \in A$ et $y \in A$,

$$\|x - y\|_E < \eta \Longrightarrow \|f(x) - f(y)\|_F \leq k\|x - y\|_E < k\eta = \frac{k}{k+1}\varepsilon < \varepsilon.$$

■

6. Applications linéaires continues

Définition 6.1 (Linéaire). Soit une application $f : E \to F$. On dit qu'elle est linéaire si pour tout $x, y \in E$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y).$$

Remarque 6.2. Si f est linéaire, alors $f(0) = f(0+0) = f(0)+f(0)$ donc on a nécessairement $f(0) = 0$.

THÉORÈME 6.3. *Soit $f : E \to F$ une application linéaire. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

i) *f est uniformément continue sur E ;*
ii) *f est continue sur E ;*
iii) *f est continue en 0 ;*
iv) *f est bornée sur $B'_E(0,1)$;*
v) *f est bornée sur $S_E(0,1) = \{x \in E : \|x\|_E = 1\}$;*
vi) *Il existe $k \geq 0$ tel que pour tout $x \in E$, $\|f(x)\|_F \leq k\|x\|_E$;*
vii) *f est lipschitzienne sur E.*

DÉMONSTRATION.

Nous allons démontrer que i) $\Longrightarrow$ ii) $\Longrightarrow$ iii) $\Longrightarrow$ iv) $\Longrightarrow$ v) $\Longrightarrow$ vi) $\Longrightarrow$ vii) $\Longrightarrow$ i).

i) $\Longrightarrow$ ii) : $\Longrightarrow$ iii) : Évident.

iii) $\Longrightarrow$ iv) : Supposons que f est continue en 0. Alors il existe $\eta > 0$ tel $\|x\|_E < \eta \Longrightarrow \|f(x)\|_F \leq 1$.
Pour tout $y \in B'_E(0,1)$, on a $\|\frac{\eta}{2}\, y\|_F = \frac{\eta}{2}\|y\|_F \leq \frac{\eta}{2} < \eta$ donc $\|f(\frac{\eta}{2}\, y)\|_F \leq 1$.
Par homogénéité de la norme et par linéarité de f, on a

$$\frac{\eta}{2}\|f(y)\|_F = \left\|\frac{\eta}{2}f(y)\right\|_F = \|f(\frac{\eta}{2}\, y)\|_F \leq 1.$$

On en déduit que $\|f(y)\|_F \leq \frac{2}{\eta}$. Finalement, f est bornée sur $B'_E(0,1)$ par $\frac{2}{\eta}$.

iv) $\Longrightarrow$ v) : Évident puisque $S_E(0,1) \subset B'_E(0,1)$.

v) $\Longrightarrow$ vi) : Supposons que f est bornée sur $S(0,1)$, c'est à dire qu'il existe $k \geq 0$ tel que pour tout $y \in S(0,1)$, $\|f(y)\|_F \leq k$.
Soit $x \in E$.
Si $x = 0$, l'inégalité $\|f(x)\|_F \leq k\|x\|_E$ est trivialement vérifiée puisque $f(0) = 0$.
Si $x \neq 0$. Alors $\frac{1}{\|x\|_E}x \in S_E(0,1)$ donc $\|f(\frac{1}{\|x\|_E})x\|_F \leq k$. Par homogénéité de la norme et par linéarité de f, on a

$$\frac{1}{\|x\|_E}\|f(x)\|_F = \left\|\frac{1}{\|x\|_E}f(x)\right\|_F = \left\|f\left(\frac{1}{\|x\|_E}x\right)\right\|_F \leq k.$$

On en déduit que $\|f(x)\|_F \leq k\|x\|_E$.

vi) $\Longrightarrow$ vii) : Supposons qu'il existe $k \geq 0$ tel que pour tout $x \in E$, $\|f(x)\|_F \leq k\|x\|_E$. Alors pour tout $x, y \in E$, par linéarité de f, on a

$$\|f(x) - f(y)\|_F = \|f(x-y)\|_F \leq k\|x-y\|_E.$$

Autrement dit, f est lipschitzienne.

vii) $\Longrightarrow$ i) : Vrai d'après le théorème 5.2

■

THÉORÈME 6.4. *On suppose que E est de dimension finie n. Soit $B = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de E. Pour $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, on pose $\|x\|_\infty = \max_{i=1,\cdots,n} |x_i|$.*

i) *L'application $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur E.*
On munit E de la norme $\|\cdot\|_\infty$
ii) *Pour tout $R \geq 0$, la boule fermée $B'_E(0,R) = \{x \in E \ : \ \|x\|_\infty \leq R\}$ est un compact de E.*
iii) *Les ensembles fermés et bornés de E sont des compacts.*
iv) *Toutes les normes sur E sont équivalentes.*

DÉMONSTRATION.

i) Soient $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in E$, $y = \sum_{i=1}^n y_i e_i \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

i)

$$\|x\|_\infty = 0 \Longleftrightarrow \max_{i=1,\cdots,n} |x_i| \Longleftrightarrow \max_{i=1,\cdots,n} |x_i| \Longleftrightarrow \forall i \in \{1,\ldots,n\},\ |x_i| = 0$$
$$\Longleftrightarrow \forall i \in \{1,\ldots,n\},\ x_i = 0 \Longleftrightarrow x = 0.$$

ii)

$$\|\lambda x\|_\infty = \max_{i=1,\ldots,n} |\lambda x_i| = \max_{i=1,\ldots,n} |\lambda||x_i| = |\lambda| \max_{i=1,\ldots,n} |x_i| = |\lambda|\|x\|_\infty.$$

iii) Pour tout $i \in \{1,\ldots,n\}$, on a

$$|x_i + y_i| \leq |x_i| + |y_i| \leq \max_{i=1,\ldots,n} |x_i| + \max_{i=1,\ldots,n} |y_i| = \|x\|_\infty + \|y\|_\infty.$$

On a alors

$$\|x+y\|_\infty = \max_{i=1,\ldots,n} |x_i + y_i| \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty.$$

ii) Munissons E et $\mathbb{R}^n$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$. L'application $f\ :\ \mathbb{R}^n \to E$ définie par $f(x_1,\cdots,x_n) = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ est linéaire. En effet, pour tout $(x_1,\cdots,x_n) \in \mathbb{R}^n$, pour tout $y = (y_1,\cdots,y_n)$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ on a

$$\begin{aligned} f(\lambda(x_1,\cdots,x_n) + (y_1,\cdots,y_n)) &= f(\lambda x_1 + y_1,\ldots,\lambda x_n + y_n) \\ &= \sum_{i=1}^n (\lambda x_i + y_i) e_i = \lambda \sum_{i=1}^n x_i e_i + \sum_{i=1}^n y_i e_i \\ &= \lambda f(x_1,\cdots,x_n) + f(y_1,\cdots,y_n). \end{aligned}$$

De plus, d'après le théorème 6.3, f est continue puisque pour tout $(x_1,\cdots,x_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\|f(x_1,\cdots,x_n)\|_\infty = \|(x_1,\cdots,x_n)\|_\infty.$$

Par ailleurs, $B'_E(0,R) = \{x \in E \in \mathbb{R}^n\ :\ \|x\|_\infty \leq R\}$ est l'image par f de la boule fermée de $\mathbb{R}^n$ $\{(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n\ :\ \|(x_1,\ldots,x_n)\|_\infty \leq R\}$, qui est un compact de $\mathbb{R}^n$. D'après le théorème 4.2, $B'_E(0,R)$ est un compact de E.

iii) Soit A un ensemble fermé et borné de E. Alors il existe $R \geq 0$ tel que $A \subset B'_E(0,R)$. A est un fermé inclus dans un compact donc A est borné.

iv) C'est une répétition de la preuve du théorème 4.8.

■

Définition 6.5. On note $\mathcal{L}(E,F)$ l'espace vectoriel des applications linéaires de E dans F et $\mathcal{L}_c(E,F)$ le sous-espace vectoriel des applications linéaires continues de E dans F.

THÉORÈME 6.6. *Si E est de dimension finie, alors toute application linéaire de E dans F est continue. Autrement dit, si E est de dimension finie, alors $\mathcal{L}(E,F) = \mathcal{L}_c(E,F)$.*

PROOF. Soit $B = (e_1,\cdots,e_n)$ une base de E. Tout $x \in E$ s'écrit de manière unique $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ avec les $x_i \in \mathbb{R}$. Dans E, toutes les normes sont équivalentes. Choisissons la

norme $\|x\|_E = \max_{i=1}^n |x_i|$.
Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors pour tout $x \in E$,

$$\|f(x)\|_F = \left\| f\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right)\right\|_F = \left\|\sum_{i=1}^n x_i f(e_i)\right\|_F \leq \sum_{i=1}^n \|x_i f(e_i)\|_F \leq \|x\|_E \sum_{i=1}^n \|f(e_i)\|_F.$$

D'après le théorème 6.3 avec $k = \sum_{i=1}^n \|f(e_i)\|_F$, f est continue sur E. ∎

THÉORÈME 6.7. *Soit $f \in \mathcal{L}_c(E, F)$. Alors les égalités suivantes sont vérifiées :*

$$\sup_{x \in S_E(0,1)} \|f(x)\|_F = \sup_{x \in B'_E(0,1)\setminus\{0\}} \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{x \in E*} \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E}.$$

Remarquons que les sup sont bien définis grâce au théorème 6.3.

DÉMONSTRATION.
Comme $S_E(0, 1) \subset B'_E(0, 1) \setminus \{0\} \subset E^*$, on a

$$\sup_{x \in S_E(0,1)} \|f(x)\|_F \leq \sup_{x \in B'_E(0,1)\setminus\{0\}} \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} \leq \sup_{x \in E*} \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E}.$$

De plus, pour tout $x \in E^*$, par homogénéité de la norme et par linéarité de f, on a

$$\frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} = \left\|\frac{1}{\|x\|_E} f(x)\right\|_F = \left\| f\left(\frac{1}{\|x\|_E} x\right)\right\|_F.$$

Comme $\frac{1}{\|x\|_E} x \in S(0, 1)$, on en déduit que

$$\sup_{x \in E*} \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} \leq \sup_{x \in S_E(0,1)} \|f(x)\|_F.$$

Finalement, les trois nombres sont égaux ∎

THÉORÈME 6.8. *L'application $|||\cdot|||$ définie sur $\mathcal{L}_c(E, F)$ par*

$$|||f||| = \sup_{x \in E*} \frac{\|f(x)\|}{\|x\|}$$

est une norme sur $\mathcal{L}_c(E, F)$.

DÉMONSTRATION. Vérifions les trois propriétés de la norme. Soient $f, g \in \mathcal{L}_c(E, F)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
i) $|||f||| = 0 \iff \forall x \in E^*,\ f(x) = 0 \iff f = 0$ (Rappelons que $f(0) = 0$).
ii)

$$|||\lambda f||| = \sup_{x \in E*} \frac{\|\lambda f(x)\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{x \in E*} |\lambda| \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} = |\lambda| \sup_{x \in E*} \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} = |\lambda| |||f|||.$$

iii) Pour tout $x \in E^*$, on a

$$\frac{\|f(x) + g(x)\|_F}{\|x\|_E} \leq \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} + \frac{\|f(y)\|_F}{\|x\|_E} \leq |||f||| + |||g|||.$$

Donc

$$|||f+g||| \leq |||f||| + |||g|||.$$

■

PROPOSITION 6.9. *Supposons que E est de dimension finie. Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Alors il existe $x_0 \in S_E(0,1)$ tel que*

$$|||f||| = \|f(x_0)\|_F.$$

DÉMONSTRATION.

Rappelons que $|||f||| = \sup_{x \in S_E(0,1)} \|f(x)\|_F$.

Comme E est de dimension finie, $S_E(0,1)$ est un compact et $\mathcal{L}(E,F) = \mathcal{L}_c(E,F)$. En particulier, f est continue et $\|f\|_F$ est continue sur $S_E(0,1)$. D'après le théorème 4.7, il existe $x_0 \in S_E(0,1)$ tel que

$$\sup_{x \in S_E(0,1)} \|f(x)\|_F = \|f(x_0)\|_F.$$

■

Calcul de $|||f|||$ dans la pratique pour $f \in \mathcal{L}(E,F)$.

On commence par majorer le plus finement possible $\|f(x)\|_F$ afin de déterminer la meilleure constante $C \geq 0$ qui vérifie :

$$\forall x \in E,\ \|f(x)\|_F \leq C\|x\|_E.$$

Cela montre que f est continue (d'après le théorème 6.3) et que pour tout $x \in E^*$,

$$\frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} \leq C$$

donc

$$|||f||| = \sup_{x \in E^*} \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} \leq C.$$

Si notre majoration est vraiment optimale, pour montrer l'égalité $|||f||| = C$, il reste à montrer l'inégalité inverse.

Dans le cas où E est de dimension finie (voir exercices 10 et 11, feuille 3), on cherche $a \in E^*$ tel que

$$\frac{\|f(a)\|_F}{\|a\|_E} = C.$$

Remarquons que l'existence d'un a non nul vérifiant $\frac{\|f(a)\|_F}{\|a\|_E} = |||f|||$ est garantie par notre proposition 6.9.

Dans le cas où E n'est pas de dimension finie (voir exercice 12), il n'existe pas peut-être pas un a vérifiant l'égalité $\frac{\|f(a)\|_F}{\|a\|_E} = C$. Si on n'en trouve pas, on cherche une suite $(a_n)_n$ d'éléments de E^* telle que

$$\frac{\|f(a_n)\|_F}{\|a_n\|_E} \to_{n \to +\infty} C.$$

Si on trouve une telle suite, comme elle vérifie pour tout n

$$\frac{\|f(a_n)\|_F}{\|a_n\|_E} \leq |||f|||,$$

par passage à la limite, on obtient

$$C \leq |||f|||.$$

7. Espaces complets

Définition 7.1. On dit qu'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé est complet si toute suite de Cauchy y est convergente. Un espace de Banach est un e.v.n. complet.

Remarque 7.2. On sait que $\mathbb{R}$ muni de la valeur absolue est un e.v.n. complet.

THÉORÈME 7.3. *Tout $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé de dimension finie est complet.*

DÉMONSTRATION. Soit $B = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de E. Dans E, toutes les normes sont équivalentes. Choisissons la norme $\|x\|_E = \max_{j=1,\ldots,n} |x_j|$ où $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$.
Soit $(u_k)_k$ une suite de Cauchy dans E. Notons $(u_{k,1}, \ldots, u_{k,n})$ les coordonnées de u_k dans la base B c'est à-dire que $u_k = \sum_{j=1}^n u_{k,j} e_j$.
Alors pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$, la suite $(u_{k,j})_k$ est une suite de Cauchy réelle. En effet, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $p > q \geq N$,

$$\|u_p - u_q\|_E = \max_{j=1,\ldots,n} |u_{p,j} - u_{q,j}| < \varepsilon.$$

On en déduit que et pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$ et pour tout $p > q \geq N$, $|u_{p,j} - u_{q,j}| < \varepsilon$.
Comme $\mathbb{R}$ est complet, chaque suite $(u_{k,j})_k$ est convergente dans $\mathbb{R}$. Posons $l_j = \lim_{k\to+\infty} u_{k,j}$ et $u = \sum_{j=1}^n l_j e_j$.
Comme

$$\|u_k - u\|_E = \max_{j=1,\ldots,n} |u_{k,j} - l_j| \to_{k\to+\infty} 0,$$

la suite $(u_k)_k$ converge vers u dans E. ■

THÉORÈME 7.4. *Si $(F, \|\cdot\|_F)$ est complet, alors l'e.v.n. $(\mathcal{L}_c(E,F), |||\cdot|||)$ est complet.*

DÉMONSTRATION. Soit $(f_n)_n$ une suite de Cauchy dans $(\mathcal{L}_c(E,F), |||\cdot|||)$.
Première étape. Montrons qu'il existe $f \in \mathcal{L}(E,F)$ telle que $\forall x \in E$, $f_n(x) \to_{n\to+\infty} f(x)$.
Soit $x \in E^*$. Comme la suite $(f_n)_n$ est de Cauchy, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $p > q \geq N$, on a

$$|||f_p - f_q||| < \frac{\varepsilon}{\|x\|_E}.$$

Donc pour tout $p > q \geq N$, on a

$$\|f_p(x) - f_q(x)\|_F \leq |||f_p - f_q||| \|x\|_E < \frac{\varepsilon}{\|x\|_E} \|x\|_E = \varepsilon.$$

Remarquons que pour $x = 0$, la suite $(f_n(0))_n$ est constante égale à 0.
Nous avons pour l'instant montré que pour tout $x \in E$, la suite $(f_n(x))_n$ est une suite de Cauchy

dans $(F, \|\cdot\|_F)$ qui est supposé être complet. Cette suite est alors convergente et nous pouvons poser
$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x).$$
Pour tout $x, y \in E$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, on a $f_n(\lambda x + y) = \lambda f_n(x) + f_n(y)$. Par passage à la limite, on obtient $f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y)$.
Nous avons donc $f \in \mathcal{L}(E, F)$.
Deuxième étape. Montrons que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ et pour tout $x \in E$, on a $\|f(x) - f_n(x)\|_F < \varepsilon\|x\|_E$.

Soit $\varepsilon > 0$. Utilisant une fois de plus que la suite $(f_n)_n$ est de Cauchy, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $p > n \geq N$, $|||f_p - f_n||| < \varepsilon$.
Pour tout $x \in E$ et pour tout $p > n \geq N$,
$$\|f_p(x) - f_n(x)\| \leq |||f_p - f_n|||\|x\| < \varepsilon\|x\|_E.$$
En faisant tendre p vers $+\infty$, on obtient que pour tout $n \geq N$, $\|f(x) - f_n(x)\|_F < \varepsilon\|x\|_E$.
Troisème étape. Montrons que $f \in \mathcal{L}_c(E, F)$. Il reste à montrer qu'elle est continue sur E.
D'après le résultat de la deuxième étape appliqué au cas particulier où $\varepsilon = 1$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ et pour tout $x \in E$, on a $\|f(x) - f_n(x)\|_F < \|x\|_E$. En particulier, pour tout $x \in E$, $\|f(x) - f_N(x)\|_F < \|x\|_E$.
Comme $f - f_N$ est linéaire, l'inégalité ci-dessus implique d'après le théorème 6.3 que $f - f_N$ est continue sur E.
On en déduit que $f = (f - f_N) + f_N$ est continue sur E comme somme de deux applications continues.
Quatrième et dernière étape : Vérifions que $(f_n)_n$ converge vers f dans $\mathcal{L}_c(E, F)$, c'est à dire que $\lim_{n\to+\infty} |||f - f_n||| = 0$.
Le résultat de la deuxième étape montre que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$,
$$|||f - f_n||| = \sup_{x\in E^*} \frac{\|f(x) - f_n(x)\|_F}{\|x\|_E} < \varepsilon.$$
Autrement dit, $\lim_{n\to+\infty} |||f - f_n||| = 0$.

∎