

Chapitre 1

Complexes simpliciaux

1.1. DÉFINITION & EXEMPLES

Définition 1.1.1. Un *complexe simplicial* est une paire (V, K) où V est un ensemble, dont les éléments seront appelés les *sommets*, et $K \subset \mathcal{P}(V)$ est un ensemble de parties non-vides de V , dont les éléments seront appelés les *simplexes*; on exige que

1. $V = \bigcup_{\sigma \in K} \sigma$,
2. si $\sigma \in K$ et $\tau \subset \sigma$, alors $\tau \in K$.

(Puisque (1) montre que l'on peut reconstruire V à partir de K , on va souvent faire l'abus de dire que K est un complexe simplicial.)

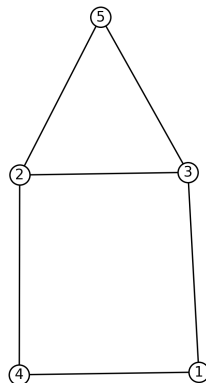
Si σ est un simplexe, sa *dimension* est $\dim \sigma = \text{Card}(\sigma) - 1$. La *dimension* de (V, K) est $\sup_{\sigma \in K} \dim \sigma$.

Dans ce cours, on supposera toujours que les complexes simpliciaux sont finis, c'est-à-dire que V est fini.

Pour se familiariser avec cette définition, examinons déjà ce qui se passe en basse dimension. Un complexe (V, K) est de dimension 0 lorsque $K = \{\{v\} \mid v \in V\}$ (ce qui présente peu d'intérêt évidemment). Voyons le cas de la dimension 1 : un complexe simplicial (V, K) de dimension 1 est appelé un *graphe* (simple). Il est donc constitué d'un ensemble V de sommets, et d'un ensemble K qui contient tous les singletons $\{v\}$ pour $v \in V$, et certaines paires $\{u, v\}$ avec $u, v \in V$, qu'on appelle les *arêtes* (s'il n'y a pas d'arêtes, la dimension est en fait 0, mais on parlera parfois de graphe tout de même).

Exemple 1.1.2. Prenons $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, avec les arêtes $\{1, 3\}$, $\{2, 3\}$, $\{2, 4\}$, $\{4, 1\}$, $\{2, 5\}$, $\{3, 5\}$. L'ensemble K contient donc ces 6 paires, et tous

Figure 1.1. Un graphe en forme de maison



les singletons. Nous avons un graphe. La situation peut être résumée par le petit dessin proposé sur le figure 1.1. En fait, toutes les informations sont présentes sur le dessin, et on peut reconstituer V et K immédiatement. C'est évidemment la méthode la plus agréable pour définir un graphe.

On pourrait même se passer de mettre des noms aux sommets : la seule ambiguïté serait alors, dans cet exemple, qu'on ne saurait pas vraiment si V est $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ ou, disons, $\{a, b, c, d, e\}$, ou tout autre ensemble à 5 éléments. Mais tous les graphes que l'on obtient de la sorte sont isomorphes, au sens suivant.

Définition 1.1.3. Soient (V_1, K_1) et (V_2, K_2) deux complexes simpliciaux. Un *homomorphisme simplicial*, ou tout simplement un *morphisme*, entre ces deux complexes est donné par une application

$$f: V_1 \longrightarrow V_2$$

telle que, si $\sigma \in K_1$, alors $f(\sigma) \in K_2$. (Évidemment $f(\sigma) = \{f(v) \mid v \in \sigma\}$.)

Les complexes simpliciaux et leurs morphismes forment une catégorie (exercice). On a donc une notion (évidente) d'isomorphisme entre deux complexes.

Exemple 1.1.4. Le graphe de Petersen est celui donné par la figure 1.2. En l'absence de noms aux sommets, nous n'avons qu'une définition à isomorphisme près.

On peut commencer à penser aux complexes de dimension supérieure. De même qu'un simplexe de dimension 1, c'est-à-dire une paire $\{u, v\}$ de

Figure 1.2. Le graphe de Petersen

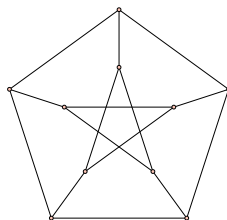
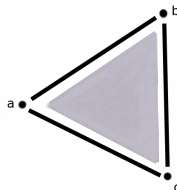


Figure 1.3. Un triangle, comme complexe simplicial

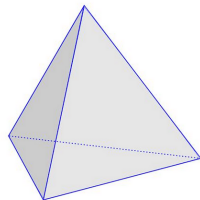


sommets, correspond intuitivement à une arête qui rejoint u et v , la présence dans K d'un simplexe de dimension 2 donné par $\{u, v, w\}$ doit nous conduire à imaginer un triangle entre les trois sommets u, v, w (qui est bien un objet de « dimension 2 » au sens intuitif). On se représente un simplexe de dimension 3 par un tétraèdre (plein), et ainsi de suite.

Exemple 1.1.5. En prenant $V = \{a, b, c\}$ et $K = \mathcal{P}(V) - \{\emptyset\}$, on obtient le complexe simplicial représenté sur figure 1.3 avec les simplexes de dimension 0, 1 et 2 mis en évidence. Bien sûr, une dessin suffit souvent à définir un complexe simplicial, même de dimension supérieure, et par exemple le tétraèdre de la figure 1.4 définit sans ambiguïté un complexe de dimension 2 (à isomorphisme près), qui possède 4 sommets, 6 arêtes, et 4 triangles (=simplexes de dimension 2). Un commentaire est souvent le bienvenu ; ainsi, nous venons de donner la dimension du complexe, ce qui empêche le lecteur de penser que le dessin représente un complexe de dimension 3.

Exemple 1.1.6. Voici maintenant des complexes définis sans dessins, mais de manière « combinatoire », très simplement. Pour $n \geq 0$, on considère $V_n = \{0, 1, \dots, n\}$ et $\Delta^n = \mathcal{P}(V_n) - \{\emptyset\}$. Le complexe simplicial (V_n, Δ^n) est toujours noté simplement Δ^n , et on l'appelle *le simplexe standard de dimension n* . Notez que Δ^n est bien un complexe simplicial, mais il se compose surtout d'un simplexe maximal $\sigma_n = V_n$ et de toutes ses parties non-vides, voilà pourquoi on abuse un peu, mais pas trop, en appelant Δ^n un simplexe. Intuitivement Δ^1 « est un segment », Δ^2 est un triangle, Δ^3 un tétraèdre (plein !), et ainsi de suite.

Figure 1.4. Un tétraèdre



En gardant V_n , mais en prenant $\mathbb{S}^n := \Delta^n - \{\sigma_n\}$, on obtient un autre complexe simplicial appelé la *sphère simpliciale de dimension $n-1$* (pour $n \geq 1$). Intuitivement, $\mathbb{S}^{n-1}$ est « le bord de » Δ^n , qui « est » une sphère. Le tétraèdre de la figure 1.4 est isomorphe à $\mathbb{S}^2$.

1.2. RÉALISATIONS TOPOLOGIQUES

Il est temps de rendre plus rigoureux le lien entre les complexes simpliciaux et les espaces topologiques. À ce stade, on a simplement noté qu'un complexe simplicial peut être décrit parfois (avantageusement) par un dessin, et on a commencé à penser de manière géométrique, mais seulement sur le plan intuitif. On va maintenant associer vraiment un espace topologique $|(\mathcal{V}, K)|$ au complexe simplicial $(\mathcal{V}, K)$.

Sans trop de surprise, on va recoller ensemble des « triangles de dimensions diverses », et il faut commencer par quelques rappels sur la convexité. Dans la suite N est un entier ≥ 1 .

Définition 1.2.1. Soient $a, b \in \mathbf{R}^N$. On définit

$$[a, b] := \{ta + (1 - t)b \mid t \in 0 \leq t \leq 1\}.$$

On dit que $X \subset \mathbf{R}^N$ est *convexe* lorsque, à chaque fois que $a, b \in X$, on a $[a, b] \subset X$.

Une intersection quelconque de parties convexes est évidemment convexe. Ceci permet de définir, pour $X \subset \mathbf{R}^N$, son *enveloppe convexe*, notée $\text{Conv}(X)$, comme étant l'intersection de tous les convexes qui contiennent X ; de manière équivalente, $\text{Conv}(X)$ est la plus petite partie convexe de $\mathbf{R}^N$ qui contient X . On va aussi noter

$$[a_1, \dots, a_n] := \text{Conv}(\{a_1, \dots, a_n\}).$$

Les points de l'ensemble $[a_1, \dots, a_n]$ sont appelés les *barycentres* de $a_1, \dots, a_n$.

Le lemme suivant vous est laissé en exercice.

Lemme 1.2.2. *On a les descriptions suivantes de l'enveloppe convexe des points $a_1, \dots, a_n \in \mathbf{R}^N$:*

$$\begin{aligned} [a_1, \dots, a_n] &= \left\{ \sum_i t_i a_i \mid 0 \leq t_i \leq 1, \sum_i t_i = 1 \right\}, \\ &= \left\{ x \in \mathbf{R}^n \mid \exists t_1, \dots, t_n \geq 0 \text{ tels que} \right. \\ &\quad \left. \sum_i t_i (x - a_i) = 0 \text{ et } \sum_i t_i > 0 \right\}. \end{aligned}$$

Ce lemme motive la définition suivante :

Définition 1.2.3. Soient $a_1, \dots, a_n \in \mathbf{R}^N$. On pose

$$]a_1, \dots, a_n[:= \left\{ \sum_i t_i a_i \mid 0 < t_i < 1, \sum_i t_i = 1 \right\}$$

(noter les inégalités strictes). On l'appelle *l'intérieur* de $[a_1, \dots, a_n]$, pour des raisons qui vont apparaître très vite.

Définition 1.2.4 (et exercice). On se donne $n + 1$ points $a_0, a_1, \dots, a_n$ dans $\mathbf{R}^N$. On dit que ces points sont *affinement indépendants* lorsqu'ils ne sont pas contenus dans un sous-espace affine de dimension $n - 1$ (c'est-à-dire une partie de la forme $x + H$ avec $x \in \mathbf{R}^N$ et H un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^N$ de dimension $n - 1$).

Il revient au même (exercice) de dire que, si k est un indice quelconque, les n vecteurs $a_0 - a_k, a_1 - a_k, \dots, a_n - a_k$ (où l'on a retiré $a_k - a_k$ de la liste) forment une famille libre.

Enfin, il est également équivalent d'exiger que chaque point de $[a_0, \dots, a_n]$ s'écrive $\sum_i t_i a_i$ avec $0 \leq t_i \leq 1$ et $\sum_i t_i = 1$ *de manière unique*.

L'exemple standard est celui où $a_0 = 0$ et $a_1, \dots, a_N$ forment la base canonique que $\mathbf{R}^N$. Ces points sont affinement indépendants, et toute sous-famille l'est aussi, évidemment.

Le lemme suivant utilise la notion d'application affine entre deux espaces vectoriels. On rappelle qu'il s'agit d'une fonction f de la forme $f(x) = \ell(x) + t$ où ℓ est linéaire, et t est un vecteur fixé. Toutes les propriétés des applications affines (en imaginant que vous ne les connaissiez pas déjà) se démontrent

très facilement en se ramenant au cas des applications linéaires ou au cas des translations $x \mapsto x + t$. Par exemple, si f est affine et

$$x = \sum_i t_i a_i,$$

où les t_i sont des scalaires dont la somme fait 1, alors

$$f(x) = \sum_i t_i f(a_i),$$

comme on le vérifie immédiatement.

Lemme 1.2.5. *Soient $a_0, \dots, a_n$ affinement indépendants dans $\mathbf{R}^N$, et soient $b_0, \dots, b_n$ des points quelconques de $\mathbf{R}^M$, où M est un entier.*

1. *Il existe une application affine $f: \mathbf{R}^N \rightarrow \mathbf{R}^M$ telle que $f(a_i) = b_i$ pour chaque i . De plus, la restriction de f à $[a_0, \dots, a_n]$ est uniquement déterminée.*
2. *Si $b_0, \dots, b_n$ sont également affinement indépendants, alors f réalise un homéomorphisme de $[a_0, \dots, a_n]$ sur $[b_0, \dots, b_n]$.*

Démonstration. Puisque $a_1 - a_0, \dots, a_n - a_0$ est une famille libre, on peut la compléter en une base de $\mathbf{R}^N$; on prend l'unique application linéaire $g: \mathbf{R}^N \rightarrow \mathbf{R}^M$ qui envoie ces vecteurs sur $b_1 - b_0, \dots, b_n - b_0$, et les autres sur 0. Ensuite on pose $f(x) = g(x) + b_0 - g(a_0)$, de sorte que $f(a_0) = b_0$ et $f(a_i) = b_0 + g(a_i - a_0) = b_i$. Ceci montre l'existence de f .

Si $x = \sum_i t_i a_i$ est un point de $[a_0, \dots, a_n]$, alors $f(x) = \sum_i t_i f(a_i) = \sum_i t_i b_i$, donc f est entièrement déterminée sur $[a_0, \dots, a_n]$. On a prouvé (1).

Pour (2), on utilise le (1) une deuxième fois, pour obtenir $g: \mathbf{R}^M \rightarrow \mathbf{R}^N$ qui est affine et qui envoie b_i sur a_i . Par la partie « unicité » du (1), les composées $f \circ g$ et $g \circ f$ sont les applications identités. $\square$

Si l'on veut « comprendre à quoi ressemble » une enveloppe convexe de la forme $[a_0, \dots, a_n]$, où les points sont affinement indépendants, on voit qu'il suffit de comprendre le cas standard, ou ce qui revient à peu près au même, le cas $n = N$. Énonçons :

Lemme 1.2.6. *Soient $a_0, \dots, a_N \in \mathbf{R}^N$ des points affinement indépendants. Alors $]a_0, \dots, a_N[$ est un ouvert convexe. De plus $[a_0, \dots, a_N]$ est l'adhérence de $]a_0, \dots, a_N[$, alors que $]a_0, \dots, a_N[$ est l'intérieur de $[a_0, \dots, a_N]$.*

Ça serait faux sans l'hypothèse d'indépendance.

Démonstration. Par le lemme précédent, il existe un automorphisme affine de $\mathbf{R}^N$ qui envoie a_0 sur 0 et $a_1, \dots, a_N$ sur les vecteurs de la base canonique. Un tel automorphisme préserve le caractère convexe ou ouvert des parties de $\mathbf{R}^N$, donc on est ramené au cas « standard ». On a alors (après une petite réflexion, attention!) :

$$]a_0, \dots, a_N[= \left\{ (t_1, \dots, t_N) \mid 0 < t_i < 1, \sum_i t_i < 1 \right\}.$$

Cet ensemble est donc l'intersection des demi-hyperplans d'équations $t_i > 0$, $t_i < 1$ et $\sum_i t_i < 1$, qui sont ouverts et convexes, donc $]a_0, \dots, a_N[$ est lui-même ouvert et convexe. Le reste est clair. $\square$

Corollaire 1.2.7. *Sous ces hypothèses, il existe un homéomorphisme*

$$f: B^N \longrightarrow [a_0, \dots, a_N],$$

qui induit un homéomorphisme entre S^{N-1} et $[a_0, \dots, a_N] -]a_0, \dots, a_N[$.

Démonstration. C'est un théorème du M1. $\square$

On dit parfois (mais dans ce cours, on ne le fera pas souvent) qu'une enveloppe convexe $[a_0, \dots, a_n]$ de $n+1$ points affinement indépendants dans $\mathbf{R}^N$ est un *simplexe géométrique de dimension n* .

Nous sommes prêts à recoller des simplexes géométriques pour obtenir un espace topologique, en suivant les instructions qui nous sont données par un ensemble simplicial (V, K) . Commençons toutefois par une définition temporaire, que l'on va améliorer plus loin.

Définition 1.2.8. Soit (V, K) un complexe simplicial. Numérotions les sommets :

$$V = \{v_1, \dots, v_n\}.$$

Pour chaque $\sigma \in K$, nous avons un ensemble d'indices correspondant :

$$\bar{\sigma} = \{i \in \{1, \dots, n\} \mid v_i \in \sigma\}.$$

Soit alors $e_1, \dots, e_n$ la base canonique de $\mathbf{R}^n$. On pose pour $\sigma \in K$:

$$|\sigma| = \text{Conv}(\{e_i \mid i \in \bar{\sigma}\}),$$

et

$$|(V, K)| = \bigcup_{\sigma \in K} |\sigma|.$$

On notera que, si σ est un simplexe de dimension n , alors $|\sigma|$ est un simplexe géométrique de dimension n . Une autre remarque simple est que, dans la définition de $|(V, K)|$, on aurait pu prendre l'union sur les simplexes *maximaux* uniquement.

Exemple 1.2.9. Décrivons $|\Delta^n|$. Il y a un unique simplexe maximal dans ce complexe, à savoir $\sigma_n = \{0, 1, \dots, n\}$, et c'est en fait l'ensemble de tous les sommets de Δ^n . Si on suit la définition, on constate que $|\Delta^n|$ est l'enveloppe convexe $[e_0, e_2, \dots, e_n]$, où les e_i forment la base canonique de $\mathbf{R}^{n+1}$. C'est donc un simplexe géométrique (c'est pourquoi on dit parfois abusivement de Δ^n que c'est un simplexe, alors que c'est tout un complexe). En particulier, $|\Delta^n|$ est homéomorphe à la boule B^n .

Quant à $|\mathbb{S}^{n-1}|$, il s'agit de $[e_0, \dots, e_n] -]e_0, \dots, e_n[$, comme on le voit facilement. Ainsi $|\mathbb{S}^{n-1}| \cong S^{n-1}$.

Cette définition de la réalisation topologique peut surprendre, de plusieurs façons. Commençons par régler une chose qui n'est pas la plus frappante, mais qui nous embêterait dans la suite si on ne faisait rien : nous avons été obligés de numéroter des sommets de K pour définir $|K|$, et bien sûr il n'y a pas de façon canonique de le faire.

Pour remédier à cela, on va utiliser un autre espace vectoriel, à la place d'un $\mathbf{R}^n$. Ça ne complique pas vraiment les choses : si E est un espace vectoriel de dimension finie n sur $\mathbf{R}$, il possède une unique topologie telle qu'il existe $f: \mathbf{R}^n \rightarrow E$ qui soit à la fois linéaire et un homéomorphisme (c'est d'ailleurs la topologie induite par une norme quelconque). On peut donc utiliser E à la place de $\mathbf{R}^n$ partout où l'on souhaite, sans ambiguïté sur la topologie utilisée. En l'occurrence, on va prendre $E = \mathbf{R}[V]$, l'espace vectoriel libre sur l'ensemble fini V .

La définition suivante remplace officiellement la précédente.

Définition 1.2.10. Soit (V, K) un complexe simplicial, et soit $E = \mathbf{R}[V]$. Pour chaque $\sigma \in K$, on note

$$|\sigma| = \text{Conv}(\sigma)$$

(ce qui a un sens car σ peut être vu comme une partie de E). La *réalisation topologique* de (V, K) est l'espace topologique

$$|(V, K)| = \bigcup_{\sigma \in K} |\sigma|,$$

muni de la topologie induite de celle de E . On notera également $|K|$ si le complexe est noté simplement K .

Si $f: (V_1, K_1) \longrightarrow (V_2, L_2)$ est un morphisme, alors f induit une application linéaire $\mathbf{R}[V_1] \longrightarrow \mathbf{R}[V_2]$ qui envoie $|(V_1, K_1)|$ sur $|(V_2, K_2)|$. On note $|f|$ l'application continue

$$|(V_1, K_1)| \longrightarrow |(V_2, K_2)|$$

obtenue.

Au final, nous avons un foncteur de réalisation topologique, de la catégorie des complexes simpliciaux vers celle des espaces topologiques.

La deuxième chose qui peut surprendre avec la définition de $|K|$, c'est qu'elle n'est pas très économe : cet espace est plongé dans $\mathbf{R}^n$ où n est le nombre de sommets. Mais il est facile d'imaginer des graphes avec un très grand nombre de sommets, que l'on peut tout de même dessiner dans $\mathbf{R}^2$!

On peut d'abord répondre que ce plongement dans $\mathbf{R}^n$ est totalement artificiel, et n'a pas d'intérêt : nous souhaitons associer un certain espace topologique à chaque complexe simplicial, de manière fonctorielle, et pas construire un plongement particulier. Donc il faut oublier l'espace ambiant, et retenir que $|K|$ est une union de simplexes géométriques (eux-mêmes homéomorphes à des boules), assemblés selon les inclusions dans K . (Il n'est pas interdit de retenir que $|K|$ est compact, comme partie fermée et bornée de $\mathbf{R}^n$, et aussi qu'on peut en faire un espace métrique si l'on veut.)

Mais on va aussi donner un petit critère pour montrer facilement qu'une partie de $\mathbf{R}^N$ (avec N quelconque) est homéomorphe à $|K|$. Commençons par observer une propriété de $|K|$, qui provient en fait de :

Lemme 1.2.11. *Soient $a_0, \dots, a_n$ des points affinement indépendants de $\mathbf{R}^N$. On suppose que l'on a des parties A et B telles que*

$$\{a_0, \dots, a_n\} = A \cup B.$$

Alors

$$\text{Conv}(A) \cap \text{Conv}(B) = \text{Conv}(A \cap B).$$

Démonstration. Un point de $[a_0, \dots, a_n]$ est de la forme

$$x = \sum_i t_i a_i,$$

avec $0 \leq t_i \leq 1$ et $\sum_i t_i = 1$ comme d'habitude, et avec les t_i *uniques*. Si X est une partie de $\{a_0, \dots, a_n\}$, alors la condition $x \in \text{Conv}(X)$ donne une autre écriture de x , et par unicité, on en déduit que $x \in \text{Conv}(X)$ est équivalent à dire que $t_i = 0$ si $a_i \notin X$. En appliquant successivement à $X = A$, B puis $A \cap B$, on en déduit le lemme. $\square$

Lorsque $[a_0, \dots, a_n]$ est un simplexe géométrique, c'est-à-dire lorsque les a_i sont affinement indépendants, les parties de la forme $\text{Conv}(A)$ avec $A \subset \{a_0, \dots, a_n\}$ sont parfois appelées les *faces (géométriques)* du simplexe. Le lemme affirme que l'intersection de deux faces est une face.

En construisant $|(V, K)|$, nous avons pris la réunion des $|\sigma|$ pour $\sigma \in K$, qui sont des faces du « gros » simplexe géométrique donné par la base canonique de l'espace ambiant. On déduit du lemme que $|\sigma| \cap |\tau| = |\sigma \cap \tau|$. C'est cette propriété qui va être mise en évidence dans la proposition suivante.

Proposition 1.2.12. *Soit (V, K) un complexe simplicial, et soit N un entier. On suppose qu'il existe une injection $f: V \rightarrow \mathbf{R}^N$ avec les propriétés suivantes :*

1. *pour chaque simplexe $\sigma \in K$, les éléments de $f(\sigma)$ sont affinement indépendants ;*
2. *$\text{Conv}(f(\sigma)) \cap \text{Conv}(f(\tau)) = \text{Conv}(f(\sigma \cap \tau))$ pour $\sigma, \tau \in K$.*

On note

$$X = \bigcup_{\sigma \in K} \text{Conv}(f(\sigma)).$$

Alors il existe un homéomorphisme $|K| \rightarrow X$ qui prolonge f .

On note que la propriété (2) est automatiquement satisfaite, par le dernier lemme, si les points de $f(\sigma \cup \tau)$ sont affinement indépendants (mais attention, $\sigma \cup \tau$ n'est pas forcément un simplexe de K).

Démonstration. Pour chaque $\sigma \in K$, on utilise le lemme 1.2.5 pour obtenir un homéomorphisme $f_\sigma: |\sigma| \rightarrow \text{Conv}(f(\sigma))$ qui prolonge f . C'est la partie « unicité » du même lemme qui garantit que f_σ et f_τ coïncident sur $|\sigma| \cap |\tau| = |\sigma \cap \tau|$ (les deux sont égales à $f_{\sigma \cap \tau}$). On a donc construit $f: |K| \rightarrow X$.

L'application f est continue (lemme du recollement), et surjective par définition de X . Montrons qu'elle est injective, et prenons donc $x \in |\sigma|$ et $y \in |\tau|$ tels que $f(x) = f(y) \in \text{Conv}(f(\sigma \cap \tau))$, en utilisant (2). Il existe donc $z \in |\sigma \cap \tau|$ tel que $f(z) = f(x) = f(y)$ (car $f_{\sigma \cap \tau}$ est surjective). Mais alors x et y sont deux points de $|\sigma|$ tels que $f_\sigma(x) = f_\sigma(z)$, donc $x = z$ car f_σ est injective. De même $z = y$, donc $x = y$.

Enfin, f est une bijection continue entre le compact $|K|$ et le métrique X , donc c'est un homéomorphisme. $\square$

Exemple 1.2.13. Considérons un polygône à n côtés, ou plus formellement : le complexe simplicial dont l'ensemble des sommets est $V = \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, avec une

arête entre k et $k + 1$ pour tout sommet k . Si on considère

$$W = \{\exp(2ik\pi/n) \mid 0 \leq k < n\} \subset \mathbf{R}^2 = \mathbf{C},$$

alors la proposition s'applique, avec $f: V \longrightarrow W$ définie par la formule $f(k) = \exp(2ik\pi/n)$. Nous avons un homéomorphisme entre $|K| \subset \mathbf{R}^n$ et $X \subset \mathbf{R}^2$, qui est le bord de l'enveloppe convexe de W .

Le vocabulaire suivant est parfois utile :

Définition 1.2.14. Soit (V, K) un complexe simplicial. Une *réalisation géométrique en dimension N* de ce complexe est une fonction $f: V \longrightarrow \mathbf{R}^N$ injective qui possède les propriétés de la dernière proposition. On pourra noter $|K|_f$ pour l'espace appelé X dans la proposition, qui est donc homéomorphe à $|K|$.

La réalisation topologique $|K| \subset \mathbf{R}[V]$ s'accompagne donc d'une réalisation géométrique canonique $V \longrightarrow \mathbf{R}[V]$, qui en général n'est pas « la meilleure » d'un point de vue géométrique, dans le sens où ce n'est pas la plus facile à visualiser.

1.3. QUOTIENTS

On va donner une méthode simple pour décrire un complexe comme « quotient » d'un autre. En fait, à l'aide d'un simple dessin, on va définir deux complexes L et K ainsi qu'un morphisme $L \longrightarrow K$; l'application $|L| \longrightarrow |K|$ induite est une application de quotient. Typiquement, l'espace $|L|$ est simple à comprendre, et on pense alors à $|K|$ comme à un espace obtenu en faisant des identifications sur $|L|$.

On procède de la manière suivante. Soit (W, L) un complexe simplicial, et soit $f: W \longrightarrow V$ une fonction, où V est un ensemble. On peut aussi bien supposer que f est surjective (quitte à remplacer V par $f(W)$). On veut faire de f un morphisme entre complexes, et la façon la plus simple de faire ça est de poser

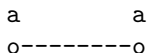
$$K = \{f(\sigma) \mid \sigma \in L\}.$$

On constate que (V, K) est un complexe simplicial, et f est maintenant un morphisme $L \longrightarrow K$. (Remarquons immédiatement une chose : si f est injective, c'est-à-dire si c'est une bijection, alors L et K s'identifient, et tout ceci n'a pas d'intérêt.)

Il est particulièrement agréable de réaliser que l'on peut représenter tout ceci avec un diagramme, dans de nombreux cas. En effet, à partir d'un dessin

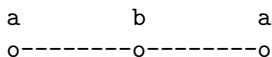
qui définit (W, L) , comme on en a vu, il suffit d'ajouter des étiquettes à côté des sommets ; l'ensemble des étiquettes est alors V , et f est la fonction qui associe un sommet à son étiquette.

Exemple 1.3.1. Essayons d'abord



Le complexe L , qui est un graphe, a donc deux sommets et une arête, et sa réalisation $|L|$ est homéomorphe à l'intervalle $[0, 1]$. Par contre $V = \{a\}$ n'a qu'un sommet, et $K = \{\{a\}\}$. Il n'y a pas de vraie arête, et K est « juste un point ». Si on espérait identifier juste les extrémités de $[0, 1]$, c'est raté.

Essayons



Maintenant L a trois sommets, et on a toujours $|L| \cong [0, 1]$. Cette fois $V = \{a, b\}$ et K est l'ensemble des parties non-vides de V ; autrement dit K est isomorphe à Δ^1 . On a $|K| \cong [0, 1]$, et l'application $|L| \rightarrow |K|$ « replie » l'intervalle $[0, 1]$ en deux (on vous laisse rendre ça rigoureux).

Voyons enfin



Dans ce cas $V = \{a, b, c\}$, et K est un graphe avec les arêtes $\{a, b\}$, $\{b, c\}$ et $\{c, a\}$; autrement dit K est isomorphe à $\mathbb{S}^1$. C'est donc un triangle, et $|L| \rightarrow |K|$ est un lacet qui fait le tour du triangle.

Remarque 1.3.2. Pour cette remarque, il est souhaitable de bien se rappeler ce qu'est une « application de quotient » (cf cours de M1, chapitre de compléments sur le chapitre 1). Dans les exemples du type ci-dessus, l'application $g = |f| : |L| \rightarrow |K|$ est surjective entre le compact $|L|$ et le métrique $|K|$. C'est donc une application de quotient. On rappelle brièvement que, essentiellement, ça veut dire que l'on peut construire l'espace $|K|$ à partir de $|L|$: on définit la relation d'équivalence $x \sim y \iff g(x) = g(y)$, on pose $X = |L|/\sim$ et on appelle $p : |L| \rightarrow X$ l'application naturelle, et enfin on met une topologie sur X en déclarant que $U \subset X$ est ouvert, par définition, si et seulement si $p^{-1}(U)$ est ouvert dans $|L|$. Alors dire que g est une « application de quotient » signifie que $|K|$ est homéomorphe à X .

Techniquement, savoir ça nous informe sur les fonctions continues définies sur $|K|$ (qu'on obtient à partir de fonctions continues sur $|L|$ qui respectent la relation $\sim$). Mais sur le plan intuitif, ceci nous permet surtout de nous représenter $|K|$ mentalement (si toutefois nous avons déjà une bonne intuition pour $|L|$) : il suffit de penser à $|L|$ avec des « recollements ». Dans l'exemple ci-dessus, le segment $[0, 1]$ avec ses deux extrémités identifiées donne bien l'image mentale d'un cercle, ou d'un triangle, ce qui est pareil.

Exemple 1.3.3. Sur la page suivante, on donne trois nouveaux exemples de diagramme. On obtient un cylindre, un ruban de Moebius, et un tore, comme réalisation topologique d'un complexe simplicial. Vous constatez que dans le premier cas, on a réussi à dessiner K lui-même, « avec ses triangles » ; dans le deuxième cas, on a dessiné $|K|$ mais on a renoncé à faire figurer la triangulation, ça aurait été difficile ; et pour le tore, même si on aurait certes pu dessiner $|K|$, faire apparaître les triangles sur un dessin propre relève du défi. On note que le complexe qui donne le tore possède 9 sommets, à savoir les (i, j) avec $1 \leq i, j \leq 3$.

On vous laisse deviner comment modifier le dernier exemple pour obtenir la bouteille de Klein, ou le plan projectif réel. Une autre remarque, toujours dans le cas du tore, c'est que chaque carré intérieur a été divisé en deux triangles, et il semble qu'on a choisi arbitrairement l'une des deux diagonales. En fait il n'en est rien : il y a une façon systématique de choisir, que nous décrivons plus loin. Ceci dit, on obtiendrait la même réalisation topologique en changeant les diagonales de diverses façons – mais pas n'importe quelle façon (trouvez un contre-exemple!).

1.4. POSETS

Définition 1.4.1. Un *ensemble partiellement ordonné*, ou *poset* (de l'anglais *partially ordered set*), est un ensemble P muni d'une relation $\leq$ qui est réflexive, transitive, et antisymétrique. On dit que P est *totalement ordonné* si pour toute paire (x, y) d'éléments de P , on a $x \leq y$ ou $y \leq x$.

Les posets forment une catégorie, dans laquelle les morphismes sont les fonctions croissantes.

Exemple 1.4.2. L'ensemble $\mathbf{N}$ avec la relation $\leq$ usuelle est totalement ordonné. Par contre si $x \leq y$ signifie « x divise y », alors $\mathbf{N}$ n'est plus totalement ordonné – mais c'est tout de même un poset.

Définition 1.4.3. Un complexe simplicial (V, K) est dit *ordonné* si V est un poset, et si chaque simplexe σ est totalement ordonné.

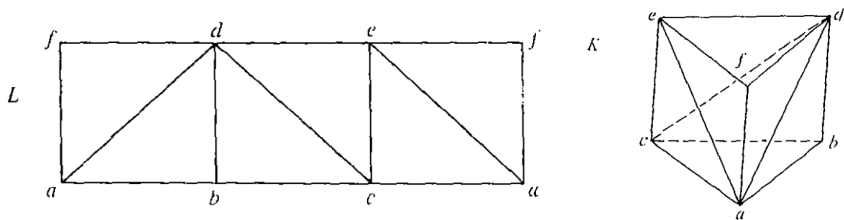


Figure 1.5. Un cylindre obtenu en racollant les côtés d'un rectangle

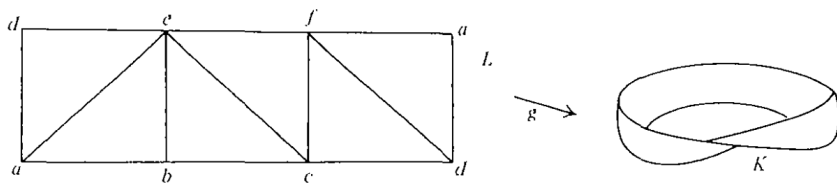


Figure 1.6. Le ruban de Moebius

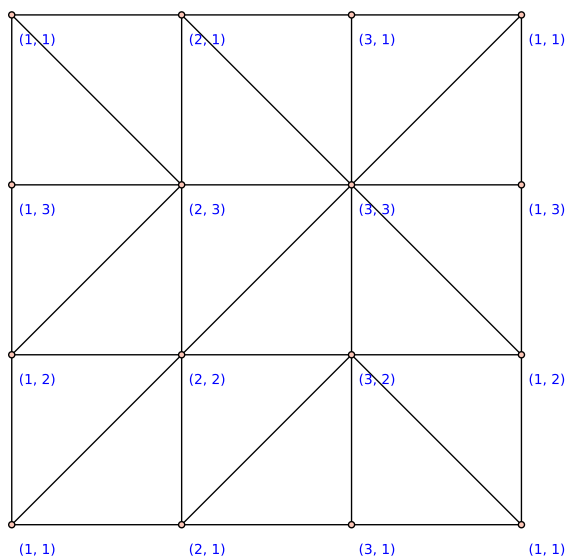


Figure 1.7. Le tore

Tout complexe simplicial (V, K) peut être ordonné : il suffit par exemple de numéroter les sommets, donc d'écrire

$$V = \{v_1, \dots, v_n\},$$

et de définir $v_i \leq v_j \iff i \leq j$. Dans ce cas V est totalement ordonné, donc (V, K) est certainement un complexe simplicial ordonné. Mais rien de ceci n'est canonique.

Dans cette partie nous allons faire des choses bien distinctes :

- Nous allons d'abord étudier une propriété importante des complexes ordonnés, à savoir : on peut définir leur produit cartésien.
- À partir d'un poset P quelconque, nous allons définir un complexe simplicial ordonné $\mathcal{K}(P)$ de manière canonique. Il y a des résultats étonnamment faciles à démontrer et à utiliser, comme : si P possède un plus grand élément, alors $|\mathcal{K}(P)|$ est contractile.
- Le point précédent marche tellement bien qu'on aimerait que chaque complexe soit de la forme $\mathcal{K}(P)$. Ce n'est pas le cas, mais on va tout de même définir un poset P_K à partir de n'importe quel complexe K , et on montre que $|K| \cong |\mathcal{K}(P_K)|$ (un homéomorphisme entre les réalisations topologiques). En bonus, on découvre que la relation entre K et $\mathcal{K}(P_K)$ est très simple.

Commençons par définir le produit de deux posets :

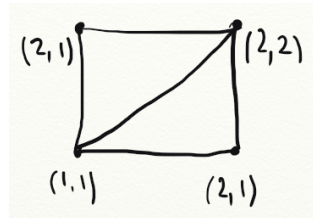
Définition 1.4.4. Soit P et Q deux posets, avec les relations $\leq_P$ et $\leq_Q$ respectivement. Le *produit cartésien* de P et Q est l'ensemble $P \times Q$ ordonné par $(p, q) \leq (p', q') \iff p \leq_P p' \text{ et } q \leq_Q q'$.

Exemple 1.4.5. Prenons $I = \{0, 1\}$ avec $0 \leq 1$. Vous montrerez à titre d'exercice que I^n (le produit cartésien de I avec lui-même n fois) est isomorphe à $\mathcal{P}(\{1, 2, \dots, n\})$ (considérer l'ensemble des positions où l'on a un 1...)

Définition 1.4.6. Soient (V, K) et (W, L) deux complexes simpliciaux ordonnés. Leur *produit cartésien* est le complexe dont l'ensemble des sommets est $V \times W$, et dont les simplexes sont les parties $\sigma \subset V \times W$ telles que :

1. σ est totalement ordonnée, pour la structure de poset produit sur l'ensemble $V \times W$;
2. l'image de σ par la projection $V \times W \longrightarrow V$ est un simplexe de K , de même que son image par la projection $V \times W \longrightarrow W$ est un simplexe de L .

Figure 1.8. Le produit $\Delta^1 \times \Delta^1$



Le produit est souvent noté tout simplement $K \times L$.

Exemple 1.4.7. Regardons le produit $\Delta^1 \times \Delta^1$, où l'on voit Δ^1 comme un complexe ordonné en décrétant que $0 \leq 1$ (les sommets de Δ^1 sont 0 et 1). L'ensemble des sommets de $\Delta^1 \times \Delta^1$ est donc $\{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$. Ici il n'y a rien à vérifier pour la condition (1) (toutes les parties non-vides de $\{0,1\}$ sont des simplexes de Δ^1).

Par contre, les parties totalement ordonnées sont $\{(0,0), (0,1), (1,1)\}$ et $\{(0,0), (1,0), (1,1)\}$, et toutes leurs sous-parties (qui sont également des simplexes, bien sûr). La situation est résumée sur la figure 1.8. On constate que $|\Delta^1 \times \Delta^1|$ est homéomorphe à un carré, donc à $|\Delta^1| \times |\Delta^1|$.

Exemple 1.4.8. En étudiant de même le produit $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, on se retrouve avec le complexe qui est présenté comme un quotient sur la figure 1.7 (dans cet exemple les trois sommets de $\mathbb{S}^1$ sont notés 1, 2, 3 et non pas 0, 1, 2). Voilà comment le choix des diagonales a été fait, sur cette figure. On note encore que $|\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1| \cong |\mathbb{S}^1| \times |\mathbb{S}^1|$.

On va montrer en général que $|K \times L|$ est homéomorphe à $|K| \times |L|$, mais il nous faut quelques préliminaires.

Lemme 1.4.9. Soient n, m des entiers ≥ 1 et s un réel ≥ 0 . On note $M(n, m, s)$ l'ensemble des matrices $A = (a_{ij})$ de taille $n \times m$ telles que $\sum_{ij} a_{ij} = s$ avec $a_{ij} \geq 0$, et telles que $\{(i, j) : a_{ij} \neq 0\}$ est une partie totalement ordonnée de $\{1, 2, \dots, n\} \times \{1, 2, \dots, m\}$.

Par ailleurs on considère $V(n, m, s)$, l'ensemble des paires (x, y) où $x = (x_1, \dots, x_n)$ est un vecteur de longueur n avec $\sum_i x_i = s$ et $x_i \geq 0$, et $y = (y_1, \dots, y_m)$ est un vecteur de longueur m tel que $\sum_j y_j = s$ et $y_j \geq 0$.

Alors il existe une bijection entre $M(n, m, s)$ et $V(n, m, s)$, donnée par

$$(a_{ij})_{ij} \mapsto \left(\left(\sum_j a_{ij} \right)_i, \left(\sum_i a_{ij} \right)_j \right),$$

c'est-à-dire en considérant les sommes dans les lignes et dans les colonnes.

Démonstration. On va procéder par récurrence sur $n + m$, le cas des matrices 1×1 ne posant pas de problème.

Soit $A \in M(n, m, s)$. Puisqu'on a un ordre total sur $\{(i, j) : a_{ij} \neq 0\}$, on peut numéroter ces éléments, de sorte que $(i_1, j_1) < (i_2, j_2) < \dots$, etc. Posons ensuite $t_k = a_{i_k, j_k}$. Les nombres $t_1, t_2, \dots$ sont donc placés dans la matrice A , de sorte qu'en passant de t_i à t_{i+1} on se déplace vers la droite ou vers le bas (ou les deux). Voici un exemple :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t_1 & t_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t_6 \end{pmatrix}.$$

Cherchons à reconstruire une telle matrice à partir des sommes dans les lignes et dans les colonnes, qui dans l'exemple sont $x = (0, t_1 + t_2, t_3, t_4, t_5, 0, t_6)$ et $y = (0, 0, t_1, t_2 + t_3, t_4 + t_5, 0, t_6)$. En comptant le nombre de 0 au début de x et de y , on trouve la position de t_1 : dans l'exemple on retrouve qu'il est ligne 2, colonne 3. Ensuite, on fait la remarque suivante : comme (i_1, j_1) est le plus petit élément, le coefficient t_1 doit être tout seul dans sa ligne, ou tout seul dans sa colonne (ou les deux). On peut savoir si c'est l'un ou l'autre en regardant le plus grand coefficient, entre le premier non-nul de x et le premier non-nul de y : dans l'exemple, on a $t_1 + t_2 > t_1$, donc t_1 est seul dans sa colonne, et t_1 est le premier coefficient non-nul de y .

On a pu reconstruire la valeur de t_1 et sa position dans la matrice en regardant x et y . On poursuit par récurrence, en effaçant quelques lignes ou colonnes de A : dans l'exemple, on pose $A' =$ la matrice obtenue en effaçant les trois premières colonnes de A , de sorte que $A' \in M(n, m - 3, s - t_1)$, et on peut calculer les vecteurs x' et y' correspondants (ici en enlevant t_1 au premier coefficient non-nul de x). Par récurrence, on peut reconstruire A' à partir de x' et y' . $\square$

Lemme 1.4.10. *Soit P un poset fini. Alors il existe un entier $n \geq 1$ et une fonction strictement croissante*

$$P \longrightarrow \{1, 2, \dots, n\}.$$

Démonstration. Premier cas particulier : si P est totalement ordonné, on pose $x_1 = \min(P)$, puis $x_2 = \min(P - \{x_1\})$, etc, de sorte que $P =$

$\{x_1, \dots, x_n\}$ pour un certain n , et $x_i \leq x_j \iff i \leq j$, donc P est en fait isomorphe au poset $\{1, 2, \dots, n\}$.

Deuxième cas particulier : soit X un ensemble fini, et considérons $P = \mathcal{P}(X)$, muni de la relation d'inclusion $\subset$. Sur $\mathcal{P}_k(X)$, l'ensemble des parties de X ayant k éléments, on choisit un ordre total quelconque $\leq_k$; ensuite, sur P , on définit un ordre total par

$$A \leq B \iff \begin{cases} \text{Card } A < \text{Card } B \text{ ou} \\ \text{Card } A = \text{Card } B = k \text{ et } A \leq_k B. \end{cases}$$

Ainsi, la relation $A \subset B$ entraîne $A \leq B$. L'identité $(P, \subset) \longrightarrow (P, \leq)$ est donc strictement croissante, et puisque P est totalement ordonné pour $\leq$, le cas précédent termine le travail.

Voici enfin le cas général. Si $x \in P$, on pose $P_x = \{y \in P : y \leq x\}$. On a $x \in P_x$, de sorte que $P_{x_1} \subset P_{x_2}$ équivaut à $x_1 \leq x_2$. La fonction $P \longrightarrow \mathcal{P}(P)$ qui à x associe P_x est donc strictement croissante, et on a fini par le cas précédent. $\square$

Proposition 1.4.11. *Soient K et L deux complexes simpliciaux ordonnés. Il existe un homéomorphisme canonique*

$$|K \times L| \longrightarrow |K| \times |L|.$$

Démonstration. On note V , resp. W , l'ensemble des sommets de K resp. L . Par le lemme 1.4.10, on peut trouver un entier n et une fonction strictement croissante $V \longrightarrow \{1, 2, \dots, n\}$. Les sommets de K peuvent donc être notés v_i pour certains indices i avec $1 \leq i \leq n$, et $v_i \leq v_j \implies i \leq j$. De même les sommets de L seront notés w_j pour certains j entre 1 et m , de façon à préserver l'ordre. Il sera commode, dans l'espace vectoriel $\mathbf{R}[V]$, de poser $v_i = 0$ s'il n'y a pas déjà de sommet qui s'appelle v_i , et de même dans $\mathbf{R}[W]$ et dans $\mathbf{R}[V \times W]$.

L'espace $|K \times L|$ est contenu dans $\mathbf{R}[V \times W]$, et ses points sont de la forme

$$\sum_{i,j} a_{ij}(v_i, w_j),$$

avec $A = (a_{ij}) \in M(n, m, 1)$, dans la notation du lemme 1.4.9. De plus, ici l'ensemble $\{(i, j) : a_{ij} \neq 0\}$ est un simplexe de $K \times L$. Par définition de ces simplexes, on peut poser

$$f \left(\sum_{i,j} a_{ij}(v_i, w_j) \right) = \left(\sum_{i,j} a_{ij}v_i, \sum_{i,j} a_{ij}w_j \right),$$

et le membre de droite appartient à $|K| \times |L| \subset \mathbf{R}[V] \times \mathbf{R}[W]$.

L'application $f: |K \times L| \longrightarrow |K| \times |L|$ est continue (sa restriction à chaque simplexe est en fait linéaire, donc le lemme du recollement s'applique tout de suite). Par compacité, il suffit maintenant de montrer que f est une bijection. Or il est facile de le déduire du lemme 1.4.9, ce qu'on vous laisse le soin de faire. $\square$

- Remarques 1.4.12.**
1. Nous n'avons pas eu l'occasion de définir ce qu'est un sous-complexe de (V, K) : c'est un complexe simplicial (V', K') avec $V' \subset V$ et $K' \subset K$. Étant donné $V' \subset V$, le *sous-complexe induit sur V'* est (V', K') , où K' désigne l'ensemble des simplexes de K dont les sommets sont dans V' .
 2. Choisissons un sommet $w_0 \in W$ du complexe (W, L) , et soit K_0 le sous-complexe de $K \times L$ induit sur $V \times \{w_0\}$. On constate que K_0 est isomorphe à K par $\iota: v \mapsto (v, w_0)$. De plus, l'homéomorphisme $|K \times L| \longrightarrow |K| \times |L|$ de la proposition, composé avec l'application $|\iota|: |K| \longrightarrow |K \times L|$, est l'homéomorphisme $x \mapsto (x, w_0)$, de $|K|$ sur $|K| \times \{w_0\}$.

Passons à la deuxième utilisation des posets : comme une machine à créer des complexes simpliciaux. Si on part de P , il y a une façon « la plus simple possible » de définir un complexe ordonné dont l'ensemble des sommets est P :

Définition 1.4.13. Soit P un poset (fini). On définit $\mathcal{K}(P)$ comme l'ensemble de *toutes* les parties totalement ordonnées (non-vides) de P . Alors $(P, \mathcal{K}(P))$ est un complexe simplicial ordonné, noté simplement $\mathcal{K}(P)$ en général.

On note immédiatement que l'on a tout fait pour que $\mathcal{K}(P \times Q) = \mathcal{K}(P) \times \mathcal{K}(Q)$.

Exemple 1.4.14. Soit P l'ensemble des entiers de 2 à 10, vu comme un poset avec la relation de divisibilité. Alors $\mathcal{K}(P)$ est représenté sur la figure 1.9. Si ajoute le nombre 1, on obtient le poset Q dont le complexe associé $\mathcal{K}(Q)$ apparaît sur la figure 1.10.

Exemple 1.4.15. Le complexe Δ^n que l'on connaît déjà est obtenu à partir d'un poset : en effet c'est $\mathcal{K}(\{0, \dots, n\})$ avec l'ordre usuel (total) sur $\{0, 1, \dots, n\}$. Par contre $\mathbb{S}^n$ ne se présente pas comme un complexe de la forme $\mathcal{K}(P)$.

Figure 1.9. Un poset P tel que $\mathcal{K}(P)$ est de dimension 2, et n'est pas connexe.

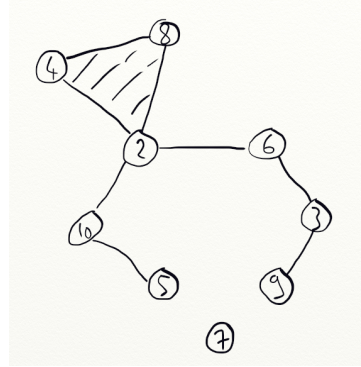
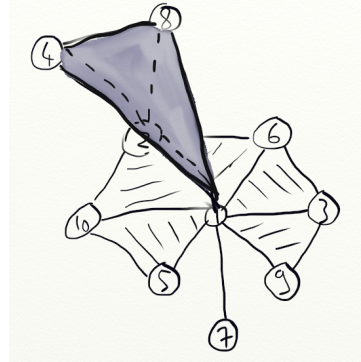


Figure 1.10. Un poset Q tel que $\mathcal{K}(Q)$ est de dimension 3. C'est « le cône sur » le précédent.



Le processus qui associe à P le complexe $\mathcal{K}(P)$ est un foncteur (de la catégorie des posets vers celle des complexes ordonnés). En effet, une application croissante $f: P \rightarrow Q$ peut être vue comme un morphisme $\mathcal{K}(P) \rightarrow \mathcal{K}(Q)$ (que l'on note encore f : par définition un tel morphisme est une application de P vers Q , et c'est bien f elle-même).

Ce foncteur va nous permettre de définir des homotopies entre morphismes d'une manière extrêmement simple. Donnons d'abord la définition :

Définition 1.4.16. Soient $f, g: K \rightarrow L$ deux morphismes entre complexes simpliciaux. On dit que f et g sont *homotopes au sens simplicial* si l'on peut ordonner K et trouver un morphisme

$$h: K \times \Delta^1 \rightarrow L$$

tel que $h \circ \iota_0 = f$ et $h \circ \iota_1 = g$.

Ici il est nécessaire d'ordonner K pour pouvoir prendre le produit cartésien. Les morphismes ι_0 et ι_1 sont définis comme dans les remarques 1.4.12, en choisissant les deux sommets de $\Delta^1 = \mathcal{K}(\{0, 1\})$. Ce sont les mêmes remarques qui montrent que, dans le cas où f et g sont homotopes au sens simplicial, les applications $|f|$ et $|g|$ sont homotopes (au sens usuel en topologie), puisque $|K \times \Delta^1| \cong |K| \times |\Delta^1| \cong K \times [0, 1]$.

Nous avons alors la surprenante :

Proposition 1.4.17. *Soient $f, g: P \longrightarrow Q$ deux fonctions croissantes. On suppose que $f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in P$. Alors f et g , comme morphismes $\mathcal{K}(P) \longrightarrow \mathcal{K}(Q)$, sont homotopes au sens simplicial.*

Démonstration. On définit $h: P \times \{0, 1\} \longrightarrow Q$ par $h(x, 0) = f(x)$ et $h(x, 1) = g(x)$. La seule chose à vérifier, et c'est vraiment très simple, c'est que h est croissante. Ceci étant, on voit h comme un morphisme

$$h: \mathcal{K}(P \times \{0, 1\}) = \mathcal{K}(P) \times \Delta^1 \longrightarrow \mathcal{K}(Q),$$

et on a (déjà) fini. □

Dans le prolongement de la définition des homotopies simpliciales, il y a des concepts évidents : deux applications $f: K \longrightarrow L$ et $g: L \longrightarrow K$ sont des *équivalences d'homotopie simpliciales* si $f \circ g$ et $g \circ f$ sont homotopes au sens simplicial aux applications identités ; dans ce cas $|f|$ et $|g|$ sont des équivalences d'homotopie au sens usuel entre $|K|$ et $|L|$. Un complexe K est dit *contractile au sens simplicial* s'il existe une équivalence d'homotopie simpliciale entre K et le complexe simplicial réduit à un sommet, et bien sûr dans ce cas $|K|$ est contractile.

Corollaire 1.4.18. *Supposons que le poset P possède un plus grand élément, ou un plus petit élément. Alors $\mathcal{K}(P)$ est contractile au sens simplicial.*

Démonstration. Faisons-le dans le cas où P possède un plus grand élément x_0 . Soit $L = \mathcal{K}(\{x_0\})$, le seul complexe simplicial n'ayant que x_0 pour sommet. On définit $i: L \longrightarrow \mathcal{K}(P)$ par $i(x_0) = x_0$, et $r: \mathcal{K}(P) \longrightarrow L$ par $r(x) = x_0$ pour tout sommet x . Alors $r \circ i$ est l'identité de L .

La composition dans l'autre sens, c'est-à-dire $g = i \circ r: P \longrightarrow P$, est constante égale à x_0 (c'est bien une fonction croissante). Si on compare g à l'application $f: P \longrightarrow P$ qui est l'identité, alors la proposition s'applique. On en déduit que f et g sont homotopes au sens simplicial.

Finalement i et r sont des équivalences d'homotopie, réciproques l'une de l'autre. □

Exemple 1.4.19. Le complexe $\Delta^n = \mathcal{K}(\{0, \dots, n\})$ est contractile, puisque le poset considéré possède un plus grand élément (ainsi qu'un plus petit).

Enfin, concluons notre tour d'horizon des posets par la construction d'un poset P_K à partir d'un complexe K ; nous verrons que $|K|$ est homéomorphe à $|\mathcal{K}(P_K)|$.

Définition 1.4.20. Soit (V, K) un complexe simplicial. Le poset $P_{(V, K)}$ ou P_K est l'ensemble K lui-même de tous les simplexes, ordonné par $\subset$.

On va s'efforcer de comprendre $\mathcal{K}(P_K)$. Un simplexe de dimension n de ce complexe est une partie totalement ordonnée de P_K de cardinal $n + 1$, donc de la forme $\{\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_n\}$ avec $\sigma_i \subset \sigma_{i+1}$ (mais pas forcément avec σ_i de dimension i , attention).

Exemple 1.4.21. Voyons le cas où (V, K) est un graphe (= un complexe de dimension 1), et décrivons $L = \mathcal{K}(P_K)$. Les sommets de L sont les simplexes de K , qui sont de deux types : ceux de dimension 0, donc de la forme $\{v\}$ où $v \in V$, et ceux de dimension 1, de la forme $\{v, w\}$ avec $v, w \in V$, c'est-à-dire les arêtes. Les simplexes de dimension 1 de L sont de la forme $\{v, \{v, w\}\}$. On note que L est aussi un graphe : il n'y a pas de simplexes de dimension supérieure.

Pour faire un dessin de L , plaçons des points noirs pour les sommets « de type 0 » et des points blancs pour les sommets « de type 1 ». Dans L , on place une arête entre deux sommets exactement dans le cas suivant : ils sont de deux couleurs différentes, le noir étant de la forme $\{v\}$ et le blanc de la forme $\{v, w\}$ (c'est bien le même v deux fois!). Finalement, le dessin qui apparaît sous nos yeux est très simple : il s'agit de $|K|$ avec des points blancs ajoutés au beau milieu des arêtes. Voir la figure 1.11.

Exemple 1.4.22. Prenez le temps de décortiquer et comprendre l'exemple suivant : si $K = \Delta^2$ (le triangle), alors $\mathcal{K}(P_K)$ apparaît comme sur la figure 1.12 comme un triangle subdivisé en six triangles plus petits.

Lemme 1.4.23. Soient $a_0, a_1, \dots, a_n$ des points affinement indépendants dans $\mathbf{R}^N$. On se donne une suite strictement croissante

$$\sigma_0 \subset \sigma_1 \subset \dots \subset \sigma_k$$

de parties de $\{a_0, a_1, \dots, a_n\}$. On note g_{σ_i} l'isobarycentre des points de σ_i :

$$g_{\sigma_i} = \frac{1}{\text{Card } \sigma_i} \sum_{x \in \sigma_i} x.$$

Alors :

Figure 1.11. Le complexe $\mathcal{K}(P_K)$, où K est un graphe en forme de maison

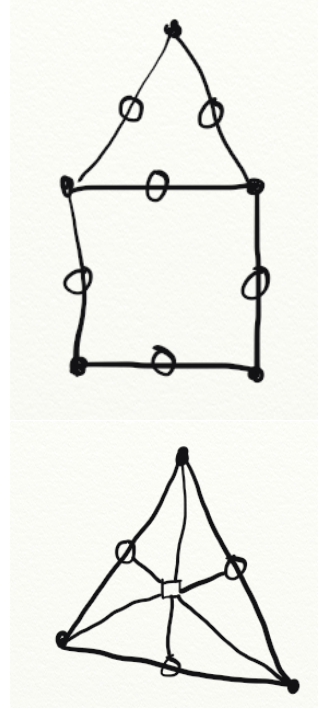


Figure 1.12. Le complexe $\mathcal{K}(P_K)$, où $K = \Delta^2$. Il y a trois « types » de sommets (noirs, blancs, carrés)

1. Les points $g_{\sigma_0}, \dots, g_{\sigma_k}$ sont affinement indépendants.
2. $[a_0, \dots, a_n]$ est l'union de tous les ensembles de la forme $[g_{\sigma_0}, \dots, g_{\sigma_k}]$, pour tous les choix possibles de σ_i .
3. Si $\tau_0 \subset \tau_1 \subset \dots \subset \tau_\ell$ est une autre suite, alors l'intersection de $[g_{\sigma_0}, \dots, g_{\sigma_k}]$ et de $[g_{\tau_0}, \dots, g_{\tau_\ell}]$ est

$$\text{Conv}(\{g_{\sigma_0}, \dots, g_{\sigma_k}\} \cap \{g_{\tau_0}, \dots, g_{\tau_\ell}\}).$$

Démonstration. On procède par récurrence sur n . Pour les propriétés (1) et (2), il est clair qu'il suffit de traiter le cas « maximal » où $k = n$ et $\text{Card } \sigma_i = i+1$ (par la forme même des énoncés) ; dans ce cas $g = g_{\sigma_n}$ est l'isobarycentre des a_i .

Pour le (1), on sait par récurrence que les points $g_{\sigma_0}, \dots, g_{\sigma_{n-1}}$ sont affinement indépendants, et, quitte à renuméroter, on peut supposer qu'ils sont tous dans $[a_0, \dots, a_{n-1}]$, alors que $g \notin [a_0, \dots, a_{n-1}]$. Donc les g_{σ_i} sont eux-même affinement indépendants.

Pour le (2), on remarque que $[a_0, \dots, a_n]$ est l'union des C_k pour $0 \leq k \leq n$, où

$$C_k = \left\{ \sum_i t_i a_i : \sum_i t_i = 1, 0 \leq t_i \leq 1, \min t_i = t_k \right\}.$$

Par ailleurs C_k est l'union des $[x, g]$ avec $x \in \text{Conv}(\{a_i : i \neq k\})$. Grâce à l'hypothèse de récurrence, on conclut facilement.

Enfin pour le (3), on procède aussi par récurrence, et on veut aussi se ramener au cas maximal pour les deux suites, donc avec $\text{Card } \sigma_i = \text{Card } \tau_i = i + 1$, et donc $k = \ell = n$: c'est moins évident, mais le lemme 1.2.11 permet tout de même d'y arriver (si les σ_i ou les τ_i ne font pas intervenir tous les points de a_0 à a_n , alors ce lemme nous ramène à un sous-ensemble strict de $\{a_0, \dots, a_n\}$, et on conclut par récurrence). Mais alors, on a $g_{\sigma_n} = g_{\tau_n} = g$. Si $x \in [g_{\sigma_0}, \dots, g_{\sigma_n}] \cap [g_{\tau_0}, \dots, g_{\tau_n}]$ alors on peut écrire

$$x = \sum_i t_i g_{\sigma_i} = \sum_i s_i g_{\tau_i}$$

avec $t_i, s_i \geq 0$ et $\sum t_i = \sum s_i = 1$. Or, chaque g_{σ_i} est un barycentre des points de départ $a_0, \dots, a_n$, et de même pour chaque g_{τ_i} , et x possède des coordonnées barycentriques bien définies par rapport à ces points ; en regardant le « poids » de a_n dans les deux écritures, on constate que

$$\frac{t_n}{n+1} = \frac{s_n}{n+1},$$

et en particulier $t_n = s_n$. On regarde alors plus précisément $y = \frac{1}{1-t_n}(x - t_n g)$. Cet élément appartient à $[g_{\sigma_0}, \dots, g_{\sigma_{n-1}}] \cap [g_{\tau_0}, \dots, g_{\tau_{n-1}}]$. Puisque l'on vient d'arguer que le (3) était vrai dans les cas « non-maximaux », on en déduit que y appartient à

$$\text{Conv}(\{g_{\sigma_0}, \dots, g_{\sigma_{n-1}}\} \cap \{g_{\tau_0}, \dots, g_{\tau_{n-1}}\}).$$

Le point x étant sur un segment allant de g à y , il est bien dans l'enveloppe convexe annoncée. $\square$

Proposition 1.4.24. *Soit (V, K) un complexe simplicial. Il existe un homéomorphisme*

$$|K| \cong |\mathcal{K}(P_K)|.$$

Démonstration. On considère $|K|$, qui est un sous-espace de $\mathbf{R}[V]$. Pour chaque sommet de $\mathcal{K}(P_K)$, c'est-à-dire pour chaque simplexe $\sigma \in K$, on

note g_σ son isobarycentre :

$$g_\sigma = \frac{1}{\text{Card } \sigma} \sum_{x \in \sigma} x \in \mathbf{R}[V].$$

Enfin, on pose $W = \{g_\sigma : \sigma \in K\}$.

On va utiliser la proposition 1.2.12, pour le complexe $(P_K, \mathcal{K}(P_K))$. Ici W est bien en bijection avec l'ensemble P_K des sommets ; la condition (1) de la proposition se déduit immédiatement du (1) du lemme précédent ; la condition (2) de la proposition se déduit du (3) du lemme. Quant au (2) du lemme, il affirme que l'espace X défini dans la proposition 1.2.12 est tout simplement $|K|$. $\square$

Définition 1.4.25. Le complexe simplicial $\mathcal{K}(P_K)$ est appelé la *subdivision barycentrique* de K , et on le note $\text{sd } K$. Par ailleurs, on définit pour tout $n \geq 1$ la n -ième subdivision barycentrique de K par récurrence, en posant $\text{sd}^n K = \text{sd}(\text{sd}^{n-1} K)$ (et $\text{sd}^1 K = \text{sd } K$).

On a aussi la notion suivante, très proche :

Définition 1.4.26. Soit (V, K) un complexe simplicial, avec une réalisation géométrique $f: V \rightarrow \mathbf{R}^N$. Une *subdivision géométrique* de (V, K) par rapport à f est un complexe simplicial (V', K') avec une réalisation géométrique $f': V' \rightarrow \mathbf{R}^N$ telle qu'il existe une injection $\iota: V \rightarrow V'$ avec $f' \circ \iota = f$, et $|K'|_{f'} = |K|_f$. (Il s'agit bien d'une égalité, pas d'un homéomorphisme ; on rappelle que les notations proviennent de la définition 1.2.14.) En clair, on rajoute des sommets à $|K|_f$ pour le subdiviser plus finement.

Par exemple, la dernière proposition, avec sa preuve, montre que la réalisation canonique $|K|$ de K possède une subdivision géométrique, dont le complexe correspondant est $\text{sd } K$. L'ensemble V' des sommets de $\text{sd } K$ est l'ensemble des simplexes de (V, K) , et dans la notation ci-dessus, on a $f'(\sigma) = g_\sigma$, l'isobarycentre de σ , alors que $\iota(v) = \{v\}$.

En fait, la même démonstration fonctionnerait avec n'importe quelle réalisation géométrique f de K : on en déduit une subdivision géométrique f' , de complexe $\text{sd } K$. En particulier, cette réalisation f' de $\text{sd } K$ possède une subdivision f'' , dont le complexe est $\text{sd}^2 K$... Par une récurrence immédiate, pour tout $n \geq 1$, le complexe $\text{sd}^n K$ réalise une subdivision géométrique $f^{(n)}$ de K par rapport à f . L'espace topologique $|\text{sd}^n K|_{f^{(n)}}$ ne dépend pas de n , c'est toujours $|K|_f$.

L'intérêt de cette procédure est que les simplexes de $\text{sd}^n K$ sont de plus en plus petits (par rapport à la norme euclidienne de l'espace ambiant). Dans

certaines applications (que nous n'aurons pas vraiment le temps d'aborder), on part par exemple d'une fonction continue $\phi: |K| \longrightarrow Y$ et on subdivise K pour que ϕ soit presque constante sur les « petits » simplexes obtenus.

1.5. SAGEMATH

Les algorithmes fondamentaux pour travailler avec les complexes simpliciaux sont implémentés dans SAGEMATH, un logiciel que vous pouvez utiliser en ligne en vous rendant à <https://sagecell.sagemath.org/>. Voici quelques commandes utiles, et nous en verrons d'autres dans le prochain chapitre.

```
sage: S= simplicial_complexes.Sphere(1); S
```

```
Minimal triangulation of the 1-sphere
```

```
sage: S.facets()
```

```
{{(1, 2), (0, 2), (0, 1)}}
```

Ici on a construit $\mathbb{S}^1$, et on a demandé la liste des simplexes maximaux, qu'on appelle parfois en Anglais les *facets*. Pour obtenir $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, rien de plus facile :

```
sage: T= S.product(S, rename_vertices= False)
```

```
sage: T.facets()
```

```
{{(1, 1), (2, 1), (2, 2)}, ((0, 0), (2, 0), (2, 2)), ((1, 1), (1, 2), (2, 2)), ((0, 1), (1, 1), (1, 2)), ((0, 0), (1, 0), (1, 2)), ((0, 1), (2, 1), (2, 2)), ((0, 0), (0, 2), (2, 2)), ((0, 0), (1, 0), (1, 1)), ((1, 0), (2, 0), (2, 1)), ((0, 0), (0, 1), (1, 1)), ((0, 0), (0, 2), (1, 2)), ((0, 0), (0, 1), (2, 1)), ((0, 0), (2, 0), (2, 1)), ((0, 1), (0, 2), (1, 2)), ((1, 0), (1, 2), (2, 2)), ((1, 0), (1, 1), (2, 1)), ((0, 1), (0, 2), (2, 2)), ((1, 0), (2, 0), (2, 2))}
```

C'est comme ça que l'on a obtenu la figure 1.7. Ou plus exactement, on a utilisé un $\mathbb{S}^1$ dont les sommets sont appelés 1, 2, 3 (et non pas 0, 1, 2). Pour ça, on peut tout simplement donner à SAGE la liste des simplexes maximaux :

```
sage: Sprime= SimplicialComplex([ [1,2], [2,3], [3,1] ])
```

```
sage: Sprime.is_isomorphic(S)
```

```
True
```

On peut demander un dessin du « 1-squelette » d'un complexe, c'est-à-dire en ignorant les simplexes de dimension ≥ 2 .

```
sage: S.graph().show()
```

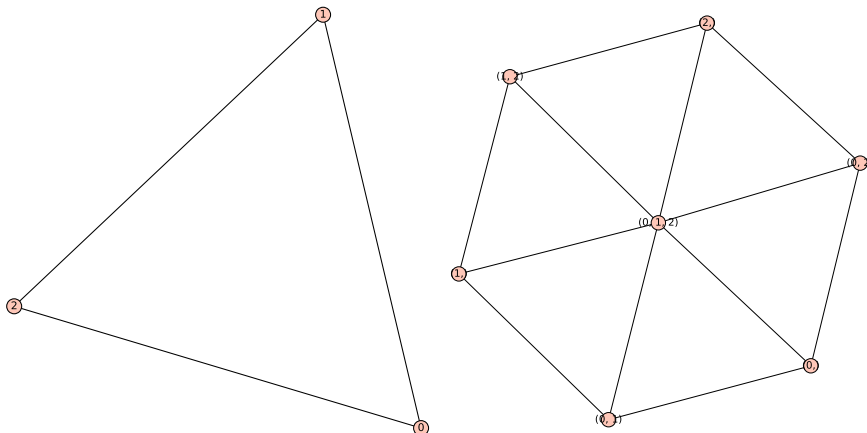


Figure 1.13. Dessins produits par Sage

Le résultat est donné sur la figure 1.13, à gauche. Évidemment, si on produisait le même dessin pour Δ^2 , il n'y aurait pas de différence, puisque le 1-squelette de Δ^2 est $\mathbb{S}^1$. Pour rendre le simplexe de dimension 2 visible, on peut regarder la subdivision barycentrique, et son 1-squelette :

```
sage: delta2= simplicial_complexes.Simplex(2)
sage: sub= delta2.barycentric_subdivision()
sage: sub.graph.show()
```

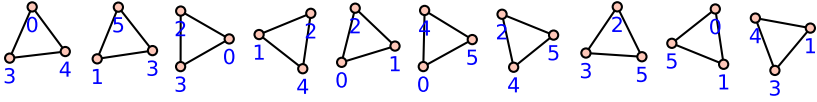
Le résultat est donné à droite du précédent. D'une manière générale, il est rare que les représentations graphiques obtenues de la sorte soient très utiles, mais on peut toujours essayer.

Vous pouvez explorer les possibilités offertes par SAGE, qui est très documenté. Par exemple, commencez à taper `simplicial_complexes.` avec le point, puis appuyez sur la touche TAB. Vous verrez une liste de complexes simpliciaux qui sont directement accessibles, sans que vous ayez besoin de dresser la liste de leurs simplexes. De la même manière, si `K` est un complexe simplicial dans SAGE, alors tapez `K.` puis essayez TAB, et vous verrez les nombreuses méthodes disponibles.

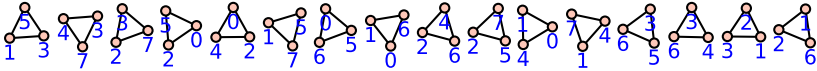
1.6. EXERCICES

Exercice 1. Sur la page suivante vous trouverez 4 puzzles. A chaque fois, il s'agit d'un diagramme qui définit un complexe simplicial de dimension 2

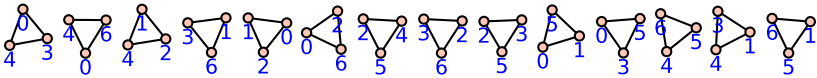
Puzzle 1 :



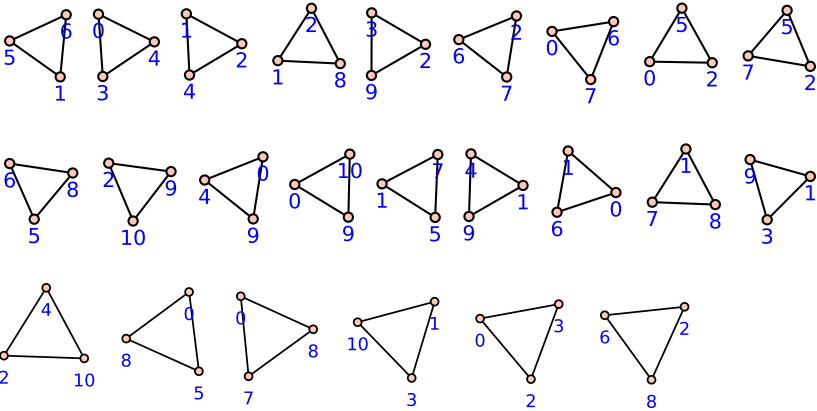
Puzzle 2 :



Puzzle 3 :



Puzzle 4 :



par passage au quotient (en recollant les triangles donnés). La réalisation topologique du complexe est, dans chaque cas, un espace bien connu, et on vous demande de le retrouver.

Exercice 2. 1. Montrer que les points $a_0, \dots, a_m \in \mathbf{R}^N$ sont affinement indépendants si et seulement si les points $(1, a_0), (1, a_1), \dots, (1, a_m) \in \mathbf{R}^{N+1}$ sont linéairement indépendants.

2. On considère la courbe

$$\gamma: \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}^m$$

définie par $\gamma(t) = (t, t^2, \dots, t^m)$. Montrer que si on choisit $m + 1$ réels quelconques distincts $t_0, \dots, t_m$, alors les points $\gamma(t_0), \dots, \gamma(t_m)$ sont affinement indépendants.

3. Montrer que si K est un complexe simplicial de dimension d , alors $|K|$ possède une réalisation géométrique dans $\mathbf{R}^{2d+1}$.

Exercice 3. Soit $n \geq 1$ un entier. On écrit $e_1, \dots, e_n$ pour la base canonique de $\mathbf{R}^n$. On définit un complexe simplicial (V, K) , où V est l'ensemble des $2n$ points $\pm e_i$, pour $1 \leq i \leq n$, et K est l'ensemble des parties σ de V telles que pour chaque i on

$$\text{Card}(\sigma \cap \{e_i, -e_i\}) \leq 1,$$

ou autrement dit, σ ne contient pas e_i et $-e_i$ à la fois. Vérifier qu'il y a 2^n simplexes maximaux. Montrer que $|K|$ s'identifie à un sous-espace de $\mathbf{R}^n$ de façon naturelle, puis faire un dessin dans le cas $n = 3$.

Montrer ensuite que $|K|$ est homéomorphe à la sphère S^{n-1} .

On rappelle que si on a un ouvert convexe et borné $U \subset \mathbf{R}^n$, alors il y a un homéomorphisme entre $\overline{U}$ et B^n , qui envoie $\overline{U} - U$ sur S^{n-1} (cf cours de M1). Il suffit donc de trouver le bon U tel que $|K| = \overline{U} - U$.

Ce complexe simplicial est noté généralement Γ^{n-1} (mais pour $n = 3$ on dit plus souvent « l'octaèdre »). Identifier dans Γ^n deux sous-complexes H_n^+ et H_n^- tels que $H_n^+ \cap H_n^-$ est isomorphe à Γ^{n-1} .

Exercice 4. La relation d'homotopie au sens simplicial est-elle une relation d'équivalence sur l'ensemble des morphismes $K \rightarrow L$?

Exercice 5. Reprendre la figure 1.7, et changer les diagonales de sorte que l'espace obtenu ne soit plus un tore.

Exercice 6. Choisir un nombre N , puis considérer le poset P des entiers entre 2 et N pour la relation de divisibilité. Faire un dessin de $\mathcal{K}(P)$. Ensuite, on pose $P' = P \cup \{1\}$; faire un dessin de $\mathcal{K}(P')$. Comment décrire simplement le passage de $|\mathcal{K}(P)|$ à $|\mathcal{K}(P')|$? Enfin, retourner au début de l'exercice.

Exercice 7. On considère Δ^n et sa réalisation canonique $|\Delta^n| \subset \mathbf{R}^{n+1}$. Soit (V, K) un complexe simplicial qui réalise une subdivision de Δ^n (dans cette réalisation). Montrer que pour tout simplexe σ de dimension $n - 1$ de K , on a l'alternative suivante : ou bien il existe un unique simplexe τ de dimension n de K tel que $\sigma \subset \tau$, ou bien il existe exactement deux simplexes τ_1 et τ_2 de K tels que $\sigma \subset \tau_i$ pour $i = 1, 2$. Montrer que le deuxième cas se présente si et seulement si l'isobarycentre de $|\sigma|$ est dans l'intérieur de $|\Delta^n|$.