Topologie algébrique

M1-MF (magistère)

Pierre Guillot

7 septembre 2020

Avertissement

Ce document est le cours de topologie algébrique donné en 2020-2021 aux élèves magistériens du M1 de l'université de Strasbourg. Les exercices sont à la fin des chapitres. Je précise tout de suite que les chapitres 2 et 6 sont optionnels, et on n'ira sans doute pas tout-à-fait au bout du 5 non plus d'ailleurs.

Enfin, j'ajoute que ce cours est amené à devenir la partie I d'un livre plus complet sur la topologie algébrique, à paraître bientôt. Pour cette raison, vous verrez parfois l'expression « dans la suite de ce livre… » qui n'a pas vraiment de sens pour l'instant.

Table des matières

Chapitre 1

Topologie & Homotopie

Dans ce premier chapitre, nous passons en revue les questions traditionnelles de la topologie, dans sa veine plutôt géométrique (par opposition à la topologie comme outil pour l'analyse). Il s'agit essentiellement de l'étude des homéomorphismes, du moins dans un premier temps. Nous étudions également ici le concept d'homotopie, qui assouplit le précédent ; affirmer qu'il existe un homéomorphisme, ou une équivalence d'homotopie, entre deux espaces, signifie dans les deux cas intuitivement que l'on peut déformer l'un pour arriver à l'autre, mais la traduction en termes mathématiques précis n'est pas du tout la même.

Dans la deuxième partie du chapitre, nous construisons les espaces archi-classiques de la topologie : tore, bouteille de Klein, ruban de Moebius, obtenus comme quotients par une action de groupe.

1.1. Espaces topologiques & homéomorphismes

Vous savez normalement ce qu'est une topologie :

Définition 1.1.1. Soit X un ensemble. Une *topologie* sur X est une famille de parties $U \subset X$, appelées les *parties ouvertes de* X ou les ouverts de X, telle que

1. toute union d'ouverts est ouverte,
2. toute intersection finie d'ouverts est ouverte,
3. $\emptyset$ et X sont ouverts.

Un ensemble X sur lequel on a choisi une topologie s'appelle un *espace topologique.*

En pratique, on définit très, très souvent les topologies en se donnant une *distance* sur X, ce qui permet de définir d'abord les boules :

$$B(x,r) = \{y \in X \mid d(x,y) < r\}\,,$$

pour $x \in X$ et $r > 0$. On déclare ensuite que $U \subset X$ est ouvert si et seulement s'il contient une boule autour de chacun de ses points. Les trois propriétés ci-dessus se vérifient facilement, et normalement, vous l'avez déjà fait. En d'autres termes, *un espace métrique peut être vu comme un espace topologique.*

Vous n'avez pas forcément vu, par contre, d'exemples d'espaces topologiques qui ne sont pas aussi des espaces métriques. Il en existe pourtant, et au bout d'un moment ils deviennent très utiles. Nous allons nous y confronter progressivement ; plusieurs chapitres de ce livre peuvent être compris et appréciés même si l'on se cantonne aux espaces métriques.

Voici déjà un exemple qui illustre le changement de point de vue :

Exemple 1.1.2. Sur $\mathbf{R}^n$, les distances classiques sont données par $d(x,y) = \|x - y\|$ où $\|\cdot\|$ est une norme. Or, vous savez sans doute que toutes les normes sur $\mathbf{R}^n$ sont *équivalentes* (et si vous ne savez pas que c'est vrai en général, vous avez dû voir au moins que toutes les normes que vous connaissez sont équivalentes). Par ailleurs, les topologies définies par deux normes équivalentes sont *exactement les mêmes* (nous continuons de considérer que c'est un résultat connu pour vous). Dans ce cours, ce qui nous intéresse, c'est $\mathbf{R}^n$ et sa topologie usuelle – la collection de ses ouverts – définie par une norme quelconque, mais la norme elle-même ne nous intéresse pas.

Il se trouve que la plupart des résultats sur les espaces métriques sont aussi vrais pour les espaces topologiques. Il faut parfois reformuler un peu l'énoncé, et soigneusement donner une démonstration qui n'utilise que les ouverts, mais on y arrive souvent. En fait, un cours sur les espaces métriques digne de ce nom prépare le terrain pour le cas général. Nous allons donner quelques une de ces généralisations, et vous demander d'en faire dans les exercices. Parfois, il faut avouer que certains concepts sont tellement faciles à généraliser que l'on prend à peine le temps de le dire : par exemple, a-t-on vraiment besoin de vous dire que, si X est un espace topologique et si $F \subset X$, alors on dit que F est *fermé* si $X - F$ est ouvert ?

Pour commencer plus sérieusement, notons que la continuité d'une fonction est un concept qui s'exprime avec la topologie :

Définition 1.1.3. Soit X et Y des espaces topologiques et soit $f\colon X \longrightarrow Y$ une fonction (dans tout le livre, au fait, on ne distingue pas les termes « fonction » et « application »). On dit que f est *continue* si, pour tout ouvert $U \subset Y$, l'ensemble $f^{-1}(U)$ est également ouvert.

Avec les espaces métriques, vous avez vu plusieurs définitions de la continuité (avec δ et ε, avec des suites...), et normalement, vous avez vu en particulier celle-là. C'est la « bonne » définition, puisqu'elle fonctionne dans le cas général. Nous allons insister, dans les paragraphes qui suivent, sur le fait que *la continuité n'est pas un concept d'espace métrique, mais d'espace topologique.*

On en arrive naturellement à poser la définition suivante :

Définition 1.1.4. On dit que $f\colon X \longrightarrow Y$ est un *homéomorphisme* entre les espaces topologiques X et Y lorsque

1. f est une bijection,
2. f est continue,
3. f^{-1} est continue.

On note $X \cong Y$ pour indiquer qu'il existe un homéomorphisme entre ces espaces. Dans ce cas, on dit aussi qu'ils sont homéomorphes.

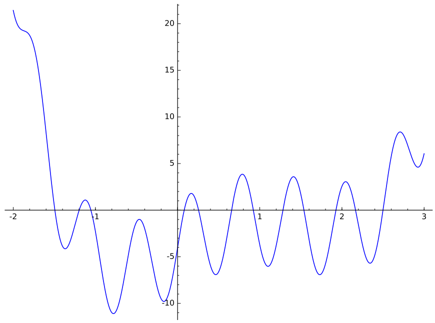
Vous connaissez beaucoup d'exemples, du genre $\exp\colon \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}^{>0}$ qui est bien un homéomorphisme, ce qui montre déjà qu'une droite et une demi-droite ouverte sont homéomorphes. Avec des exemples du même genre (à l'aide des « fonctions usuelles »), vous vérifierez que deux intervalles ouverts non vides $]a, b[$ et $]c, d[$ sont toujours homéomorphes, même si les bornes sont $\pm\infty$.

Il faut prendre le temps de réfléchir au fait que deux espaces homéomorphes peuvent avoir des aspects bien différents – tandis que, lorsqu'on exige que X et Y soient des espaces métriques, et que f préserve les distances (on parle alors d'une « isométrie »), alors X et Y sont presque indiscernables « sur le dessin ». Voyons un premier exemple (la partie suivante en contient beaucoup d'autres).

Exemple 1.1.5. Soit $\varphi\colon [a, b] \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue, soit $X = [a, b]$, et soit $Y = \{(x, \varphi(x)) \mid x \in [a, b]\}$, le graphe de φ. Enfin, on définit $f\colon X \longrightarrow Y$ par $f(x) = (x, \varphi(x))$. C'est une bijection continue, et sa réciproque est $f^{-1}\colon Y \longrightarrow X$ définie par $f^{-1}(x, y) = x$, qui est également continue. Donc f est un homéomorphisme.

Mais sur un dessin, X et Y peuvent être bien différents. Par exemple sur la figure 1.1, certaines des boules de Y ne sont pas connexes, ce qui n'arrive pas dans X. Nous sommes donc bien en présence de deux espaces métriques bien distincts, non isométriques, mais ils sont tout de même homéomorphes, et c'est ça qui nous intéresse dans ce cours. On dit parfois de manière imagée que la topologie (contrairement à l'étude des espaces métriques, qui relève plutôt de la géométrie) étudie « les propriétés qui restent vraies même en étirant et déformant les espaces, tant qu'on ne les déchire pas ».

Figure 1.1. Le graphe d'une fonction sur un intervalle.



Remarque 1.1.6. Revenons un peu sur la définition de « homéomorphisme ». La condition (2) nous dit que pour tout ouvert $U \subset Y$, la partie $f^{-1}(U)$ est ouverte dans X ; le (3) affirme que pour tout ouvert $V \subset X$, la partie $(f^{-1})^{-1}(V) = f(V)$ est ouverte dans Y. On a donc une bijection entre les ouverts de X et les ouverts de Y, donnée par $V \mapsto f(V)$, de réciproque $U \mapsto f^{-1}(U)$.

Le vocabulaire suivant va donc être utile :

Définition 1.1.7. Soit $f\colon X \longrightarrow Y$ une application entre espaces topologiques. On dit que f est *ouverte* lorsque, pour tout ouvert $V \subset X$, la partie $f(V)$ est ouverte dans Y.

On peut donc énoncer que si f est une bijection continue, alors c'est un homéomorphisme si et seulement si c'est aussi une application ouverte. Il faut d'ailleurs nous arrêter sur un phénomène agaçant : il existe vraiment des bijections continues qui ne sont pas ouvertes, contrairement à ce qu'on pourrait peut-être attendre par analogie avec des contextes différents.

Exemple 1.1.8. Un exemple très simple est obtenu avec $X = [0, 2\pi[$ et $Y = S^1 = \{z \in \mathbf{C} \text{ tels que } |z| = 1\}$, en prenant $f(t) = \exp(it)$. C'est une bijection continue, mais pas un homéomorphisme ; en fait il est simple de se convaincre qu'il n'existe *aucun* homéomorphisme entre ce X et ce Y. Essayez de deviner pourquoi maintenant (la réponse est plus loin dans le chapitre).

Nous n'avons pas envie de perdre trop de temps avec ce genre de pathologies, les exemples étant, en réalité, fort rares. Nous allons maintenant montrer un résultat qui va dans ce sens, et qui va évacuer les difficultés la plupart du temps. Voici d'abord quelques définitions.

Définition 1.1.9. Un espace topologique X est dit *compact* lorsque, de tout recouvrement de X par des ouverts, on peut extraire un recouvrement fini.

Sans surprise, des différentes définitions de la compacité que vous avez déjà vues, on a pris celle qui s'exprime avec des ouverts. La définition suivante, par contre, est peut-être nouvelle pour vous.

Définition 1.1.10. Un espace topologique X est dit *séparé* lorsque, pour tous $x, y \in X$ avec $x \neq y$, il existe deux ouverts U, V avec $x \in U$, $y \in V$ et $U \cap V = \emptyset$.

Par exemple, si X est un espace métrique, posons $\rho = d(x, y) > 0$, alors $U = B(x, \rho/3)$ et $V = B(y, \rho/3)$ font l'affaire. *Les espaces métriques sont séparés*, et donc tous les espaces que l'on va rencontrer concrètement seront séparés.

Voici tout de même un exemple d'espace non séparé. Soit X un ensemble quelconque, avec la *topologie grossière*, qui est celle qui ne contient que X et $\emptyset$ comme ouverts. On vérifie que c'est bien une topologie, et que X n'est pas séparé s'il contient au moins deux points.

Encore un petit lemme et nous seront prêts à donner un énoncé classique de « topologie générale ».

Lemme 1.1.11. *Soit Y un espace topologique, et $X \subset Y$. L'ensemble des parties de X de la forme $U \cap X$, où U est ouvert dans Y, est une topologie sur X. On l'appelle la* topologie induite.

Si Y est en fait un espace métrique, alors la topologie induite sur X est tout simplement celle donnée par la restriction de la distance de Y.

Démonstration. Exercice à la fin du chapitre. □

Nous arrivons à :

Proposition 1.1.12. *Soit Y un espace topologique, et $X \subset Y$. Si X est compact (pour la topologie induite), et si Y est séparé, alors X est fermé dans Y.*

Démonstration. C'est un exercice facile lorsque Y est un espace métrique, mais dans le cas général il faut travailler un peu plus. Soit donc $\Omega = Y - X$, et montrons que Ω est ouvert. On prend et on fixe $y \in \Omega$. Pour tout $x \in X$, puisque Y est séparé, on trouve un ouvert U_x contenant x, et un ouvert V_y contenant y, tels que $U_x \cap V_y = \emptyset$.

Les ouverts $U_x \cap X$, pour $x \in X$, recouvrent X. Par compacité, on peut recouvrir X par $U_{x_1}, \ldots, U_{x_n}$ pour un entier n. Si on pose maintenant $W = V_{x_1} \cap \cdots \cap V_{x_n}$, alors W est ouvert, il contient y, et $W \cap X = \emptyset$: pour ce dernier point, il suffit de voir que si $x \in W \cap X$, alors $x \in U_{x_i}$ pour un indice i, et $x \in V_{x_i}$, ce qui est absurde car U_{x_i} et V_{x_i} sont disjoints.

Donc $W \subset \Omega$. Si on note cet ouvert W_y pour montrer la dépendence en y, alors on constate que Ω est l'union de tous les W_y à mesure que $y \in \Omega$ (clairement !), c'est donc une union d'ouverts, donc Ω est lui-même ouvert. □

On va en déduire le théorème suivant, qui va nous faciliter grandement la tâche :

Théorème 1.1.13. *Soit $f : X \longrightarrow Y$ une bijection continue entre deux espaces topologiques, avec X compact et Y séparé. Alors f est un homéomorphisme.*

Démonstration. On veut montrer que f^{-1} est continue. Par définition, il faut montrer que pour tout ouvert $U \subset X$, la partie $f(U)$ est ouverte dans Y. Il revient au même (petit raisonnement auquel vous êtes habitués) de vérifier que pour tout fermé $F \subset X$, la partie $f(F)$ est fermée dans Y.

Or, puisque X est compact, toute partie fermée F de X est également compacte ; et puisque f est continue, l'image $f(F)$ est également une partie compacte de Y. (Ici nous utilisons deux résultats « bien connus » de vous au moins dans le cas des espaces métriques ; dans les exercices nous vérifierons qu'ils fonctionnent bel et bien dans le cas général, mais vous verrez qu'il n'y a pas de piège.) D'après la proposition, $f(F)$ est donc fermée dans Y, ce qu'on voulait. $\square$

Nous allons voir des exemples dans la partie suivante. Comme promis, nous arrêtons momentanément les résultats subtils sur les espaces topologiques : nous avons tout ce dont nous avions besoin pour la suite du chapitre.

1.2. Parties convexes et leurs bords

Nous avons besoin de nous constituer un petit stock d'exemples d'espaces homéomorphes, et nous allons y parvenir à l'aide d'un outil concernant les parties convexes, qui servira beaucoup dans la suite. Par exemple, un cercle et une ellipse quelconques sont toujours homéomorphes ; un disque et un carré, ou un losange, sont homéomorphes. Tout ceci est évident « visuellement », et nous allons être capable de donner une preuve rigoureuse. Il faut tout de même commencer par des notations et des petits rappels.

Pour un vecteur $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$, on notera

$$\|x\| = \left(\sum_i x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

la norme euclidienne de x. On pose alors

$$S^{n-1} = \{x \in \mathbf{R}^n \mid \|x\| = 1\},$$

la sphère de dimension $n - 1$, et

$$B^n = \{x \in \mathbf{R}^n \mid \|x\| \leq 1\},$$

la boule fermée de dimension n. Ensuite, pour $x, y \in \mathbf{R}^n$, on note

$$[x, y] = \{tx + (1-t)y \mid 0 \leq t \leq 1\},$$

le segment entre x et y. Une partie $U \subset \mathbf{R}^n$ est dite *convexe* lorsque $[x, y] \subset U$ dès lors que $x, y \in U$. Enfin, un *rayon émanant de* $w \in \mathbf{R}^n$ est une partie de $\mathbf{R}^n$ de la forme

$$\mathscr{R} = \{w + tp \mid t \geq 0\},$$

pour un $p \in \mathbf{R}^n$ fixé et non-nul. Un tel rayon est donc homéomorphe à $\mathbf{R}^{\geq 0}$ (prendre $t \mapsto w + tp$ et $x \mapsto \|x - w\|/\|p\|$).

Lorsque X est un espace topologique et que $Y \subset X$ est une partie de X, on note $\overline{Y}$ l'adhérence de Y (le plus petit fermé qui contient Y). La notation $\mathrm{Int}(Y)$ désigne l'intérieur de Y (le plus grand ouvert contenu dans Y), et $\partial Y = \overline{Y} \smallsetminus \mathrm{Int}(Y)$ est le bord de Y (ou la frontière de Y).

Proposition 1.2.1. *Soit $U \subset \mathbf{R}^n$ une partie ouverte, convexe et bornée, et soit $w \in U$.*

1. *Chaque rayon $\mathscr{R}$ émanant de w intersecte ∂U en un point et un seul.*
2. *Il existe un homéomorphisme $\overline{U} \longrightarrow B^n$ qui induit par restriction un homéomorphisme $\partial U \longrightarrow S^{n-1}$ et un autre $U \longrightarrow \mathrm{Int}(B^n)$.*

Avant même la démonstration, énonçons tout de suite :

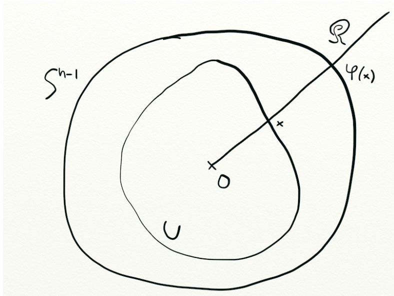
Corollaire 1.2.2. *Si U et V sont deux parties de $\mathbf{R}^n$ qui sont ouvertes, convexes, bornées, et non vides, alors U et V sont homéomorphes, ainsi que leurs bords, et leurs adhérences.*

Par exemple dans $\mathbf{R}^2$, un disque, un losange, une ellipse, sont homéomorphes (et ceci vaut pour les intérieurs, ou les adhérences, ou les bords).

Démonstration. Commençons par (1). Il est utile de rappeler qu'une partie convexe de $\mathbf{R}$ est exactement la même chose qu'un intervalle ; on en déduit qu'une partie de $\mathbf{R}^{\geq 0}$ qui est convexe, ouverte, bornée, et contient 0, est de la forme $[0, a[$. Par suite, si $\mathscr{R} = \{w + tp \mid t \geq 0\}$ pour un certain p (et avec le w de l'énoncé), alors $\mathscr{R} \cap U$ est de la forme $\{w + tp \mid 0 \leq t < a\}$ pour un certain $a > 0$. Le point $x = w + ap$ est alors visiblement dans $\overline{U}$ mais pas dans U, donc il est dans ∂U.

Montrons que x est unique. Si $y \in \mathscr{R} \smallsetminus U$, avec $y \neq x$, alors $y = w + bp$ pour un $b > a$. On en déduit que x est sur le segment $[w, y]$, donc il existe $0 \leq t < 1$ tel que $x = (1-t)w + ty$ (exercice : on peut en fait prendre $t = a/b$, mais ça n'a pas vraiment d'importance).

Figure 1.2. *Illustration de la démonstration de la proposition 1.2.1*



Supposons alors que $y \in \overline{U}$, en continuant de supposer $y \neq x$, et cherchons une contradiction. Soit (y_n) une suite d'éléments de U convergeant vers y. On pose $w_n = (x - ty_n)/(1-t)$, ce qui a un sens car $t \neq 1$, de sorte que

$$x = (1-t)w_n + ty_n\,. \tag{*}$$

On a $w_n \longrightarrow (x-ty)/(1-t) = w$, et puisque U est ouvert, on en déduit que $w_n \in U$ pour n suffisamment grand. Mais alors (*) montre que $x \in U$ par convexité, ce qui est absurde. Finalement, on a bien montré que si $y \in \mathscr{R} \cap \partial U$, alors $y = x$.

Passons au (2). On va rédiger dans le cas où $w = 0$, pour simplifier les notations. L'idée intuitive est simple : on va prendre une fonction « radiale » sur $\mathbf{R}^n$, c'est-à-dire une fonction $\varphi\colon \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n$ qui préserve chaque rayon $\mathscr{R}$ émanant de 0, en faisant simplement une mise à l'échelle « linéaire » telle que, si x est le point unique d'intersection de $\mathscr{R}$ et ∂U décrit dans le (1), alors on le « ramène » à la norme 1.

Par contre, pour s'assurer que « tout est continu », il faut travailler un peu, comme suit. La fonction $f\colon \mathbf{R}^n \smallsetminus \{0\} \longrightarrow S^{n-1}$ définie par $f(x) = x/\|x\|$ est continue et surjective. Le point (1) montre que f induit, par restriction, une bijection $\partial U \longrightarrow S^{n-1}$ (que l'on note encore f). Puisque ∂U est fermé et borné dans $\mathbf{R}^n$, c'est une partie compacte ; par le théorème 1.1.13, f est automatiquement un homéomorphisme.

Soit donc $g\colon S^{n-1} \longrightarrow \partial U$ la réciproque de f, qui est continue. On étend g à la boule B^n de manière « linéaire », c'est-à-dire que l'on définit $G\colon B^n \longrightarrow U$ par $G(0) = 0$ et

$$G(x) = \|x\| g(x/\|x\|)$$

pour $x \neq 0$. Notons que, si on fixe u tel que $\|u\| = 1$, alors le segment $[0, u]$ est constitué des tu où $0 \leq t \leq 1$, et l'image de ce segment par G est constitué des $G(tu) = tg(u)$, c'est donc le segment $[0, g(u)]$. A l'aide de cette description, on en déduit que G est une bijection.

La fonction G est continue pour tous les $x \neq 0$; et on a l'inégalité $\|G(x)\| \leq M\|x\|$ où M est une borne pour la norme des éléments de U, ce qui montre la continuité de G en 0. Finalement, c'est encore par compacité que l'on conclut que G est un homéomorphisme. $\square$

1.3. Questions classiques de topologie

Un problème fondamental de topologie est celui de savoir décider, étant donnés deux espaces topologiques X et Y, s'ils sont, oui ou non, homéomorphes. Par exemple :

- est-ce que $\mathbf{R}^n$ et $\mathbf{R}^m$ sont homéomorphes, lorsque $n \neq m$?
- est-ce que S^n et S^m sont homéomorphes, lorsque $n \neq m$?
- est-ce que « le tore », c'est-à-dire la surface dessinée ci-dessous (dont une définition plus rigoureuse peut bien attendre) est homéomorphe à une sphère S^2 ?

Une stratégie générale est de chercher des *invariants topologiques*. Par définition, un invariant topologique est une propriété P qu'un espace topologique X est susceptible d'avoir ou pas, ayant la particularité que, si Y est homéomorphe à X, alors la propriété P est valable pour Y si et seulement si elle l'est pour X. Voici des exemples :

- La connexité, et aussi la connexité par arcs (termes que vous devez connaître). Par exemple $X =]0,1[\cup]1,2[$ n'est pas homéomorphe à $Y =]0,1[$, car ce dernier est connexe (et même connexe par arcs) alors que X ne l'est pas (étant l'union de deux ouverts disjoints non-vides).
- La compacité. On en déduit que S^n n'est homéomorphe à aucun $\mathbf{R}^m$ avec $m \geq 1$, car aucun de ces espaces n'est compact, alors que S^n l'est. On en déduit aussi que $[0, 2\pi[$ n'est pas homéomorphe à S^1 (cf ci-dessus).

(Par contre, le diamètre d'un espace métrique n'est pas un invariant topologique, il dépend du choix de la fonction distance.)

Parfois, il faut ruser un minimum avant d'appliquer ces invariants. La proposition suivante est un classique du genre.

Proposition 1.3.1. *1. Supposons que $n \geq 2$. Alors $\mathbf{R}$ n'est pas homéomorphe à $\mathbf{R}^n$.*

2. L'intervalle $[0,1]$ n'est pas homéomorphe au cercle S^1.

Démonstration. Supposons que $\varphi \colon \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}^n$ soit un homéomorphisme. Alors par restriction, on obtient aussi un homéomorphisme

$$\mathbf{R} - \{0\} \longrightarrow \mathbf{R}^n - \{\varphi(0)\} .$$

Or pour tout $x \in \mathbf{R}^n$, l'espace $\mathbf{R}^n - \{x\}$ est connexe par arcs, pour $n \geq 2$ (c'est évident, et on vous laisse le rédiger si vous voulez). D'un autre côté, l'espace $\mathbf{R} - \{0\}$ n'est pas connexe, donc c'est absurde.

Le (2) est laissé à titre d'exercice (utiliser exactement la même idée). $\square$

On connaît les réponses à toutes les questions ci-dessus : c'est tout le temps « non » (ainsi, si $\mathbf{R}^n \cong \mathbf{R}^m$ alors $n = m$, de même avec S^n et S^m, et le tore n'est pas homéomorphe à la sphère). Mais les démonstrations sont difficiles ! Ce livre va les présenter toutes. Dans la première partie, nous allons déjà être capables d'établir que S^1 n'est pas homéomorphe à S^n pour $n \geq 2$, et que $\mathbf{R}^2$ n'est pas homéomorphe à $\mathbf{R}^n$ pour $n \neq 2$; nous allons aussi étudier toute une famille de surfaces, parmi lesquelles la sphère et le tore, et montrer qu'elles ne sont pas homéomorphes les unes aux autres.

Notre outil sera un invariant topologique, qu'on appelle le *groupe fondamental*. C'est même mieux qu'un invariant topologique, puisque c'est un « invariant d'homotopie », concept que l'on introduit maintenant.

1.4. Homotopies

Définition 1.4.1. Deux applications continues $f, g : X \longrightarrow Y$ sont dites *homotopes* lorsqu'il existe une application continue

$$F : X \times [0,1] \longrightarrow Y ,$$

telle que $F(x,0) = f(x)$ et $F(X,1) = g(x)$. En d'autres termes, il existe une famille d'applications de X dans Y, à savoir $x \mapsto F(x,t)$ pour $0 \leq t \leq 1$, qui part de f pour arriver à g, et varie continûment. On dit aussi que F est une *homotopie* entre f et g.

On note $f \simeq g$ lorsque f et g sont homotopes.

Remarque 1.4.2. S'il n'est pas clair pour vous que $X \times [0,1]$ est un espace topologique, voir l'exercice 8.

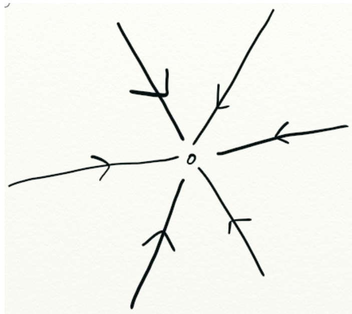


Figure 1.3. Rétraction de $\mathbf{R}^n$ *sur* $\{0\}$.

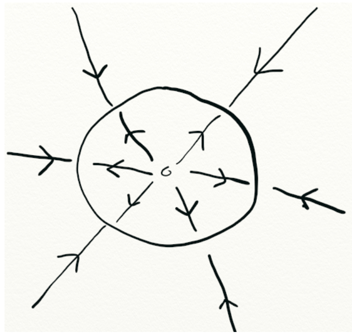


Figure 1.4. Rétraction de $\mathbf{R}^n - \{0\}$ *sur* S^{n-1}.

Exemple 1.4.3. Soit $X = Y = \mathbf{R}^n$, on considère $c : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n$ l'application constante $c(x) = 0$, et $i : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n$ l'application identité $i(x) = x$. Montrons que c et i sont homotopes. Il suffit de prendre :

$$F : \mathbf{R}^n \times [0,1] \longrightarrow \mathbf{R}^n$$

$$F(x,t) = tx\,.$$

Alors $F(x,0) = 0 = c(x)$ et $F(x,1) = x$. La continuité est évidente (chose que l'on va bientôt arrêter de préciser).

Progressivement, il va falloir s'habituer à définir les homotopies à l'aide d'un simple dessin – du moins lorsque les formules rigoureuses qui sont sous-entendues sont suffisamment claires. L'idée est de tracer les « lignes » $F(x,t)$ avec x fixé et t qui parcourt $[0,1]$. Dans cet exemple, on obtient la figure 1.3.

Exemple 1.4.4. Soit $X = Y = \mathbf{R}^n - \{0\}$, on considère cette fois $p(x) = x/\|x\|$, et $i(x) = x$ de nouveau. On voit que p et i sont homotopes en prenant

$$F : (\mathbf{R}^n - \{0\}) \times [0,1] \longrightarrow \mathbf{R}^n - \{0\}$$

$$F(x,t) = (1-t)\,x + t\,\frac{x}{\|x\|}\,.$$

Ici l'image de p est la sphère S^{n-1}. Voir la figure 1.4 pour un dessin.

Définition 1.4.5. Soit $f : X \longrightarrow Y$ une application continue. On dit que f est une *équivalence d'homotopie* lorsqu'il existe $g : Y \longrightarrow X$ telle que $g \circ f \simeq id_X$ et $f \circ g \simeq id_Y$.

On dit alors que X et Y ont le même *type d'homotopie*, ou parfois qu'ils sont homotopie-équivalents, et on note $X \simeq Y$. (Attention cependant, on ne dit jamais que X et Y sont « homotopes », ce sont les fonctions qui peuvent être homotopes.)

Notons tout de suite que deux espaces homéomorphes ont, évidemment, le même type d'homotopie ! Mais la réciproque n'est pas vraie, comme les exemples vont le montrer.

Exemple 1.4.6. Soit $X = \mathbf{R}^n$, et soit $Y = \{0\}$. Prenons $f : X \longrightarrow Y$ l'application constante, et soit $g : Y \longrightarrow X$ l'inclusion. Alors f et g sont des équivalences d'homotopie.

En effet, $f \circ g = id_Y$ clairement, et $c = g \circ f$ est l'application constante $c(x) = 0$, donc d'après l'exemple 1.4.3, on a bien $g \circ f \simeq id_X$.

Ainsi $\mathbf{R}^n$ a le même type d'homotopie qu'un espace réduit à un point : on dit qu'il est *contractile*. Ce mot va beaucoup revenir dans le cours !

Exemple 1.4.7. Soit $X = \mathbf{R}^n - \{0\}$ et $Y = S^{n-1}$, on prend alors $f : X \longrightarrow Y$ définie par $f(x) = x/\|x\|$, et $g : Y \longrightarrow X$ l'inclusion. Alors $f \circ g = id_Y$, et l'exemple 1.4.4 montre que $g \circ f \simeq id_X$. Donc $\mathbf{R}^n - \{0\}$ a le même type d'homotopie que la sphère S^{n-1}.

Le vocabulaire suivant peut être utile :

Définition 1.4.8. Si f et g sont des applications $X \longrightarrow Y$ qui sont égales sur $A \subset X$, on dit qu'une homotopie $F\colon X \times I \longrightarrow Y$ entre f et g est une homotopie relativement à A, où rel A pour abréger, lorsque $F(a,t) = f(a) = g(a)$ pour tout $a \in A$ et $0 \leq t \leq 1$.

Voici un premier exemple d'homotopie relative, sous forme d'une définition :

Définition 1.4.9. Soit X un espace topologique, et soit A une partie de X. Une *rétraction* de X sur A est une application continue $r\colon X \longrightarrow X$ telle que $r(X) = A$ et $r(a) = a$ pour $a \in A$, et qui est homotope rel A à l'identité.

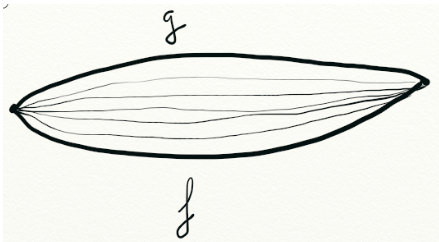
(Explicitement, il existe $F\colon X \times [0,1] \longrightarrow X$ continue, et pour tout $x \in X$ on a $F(x,1) = x$, $F(x,0) = r(x)$, et $F(a,t) = a$ pour $a \in A$.)

Lorsqu'il existe une rétraction de X sur A, nous dirons que A est un *rétract* de X.

Par exemple, nous avons vu ci-dessus que S^{n-1} est un rétract de $\mathbf{R}^n$. En général, si A est un rétract de X, alors l'inclusion $i\colon A \longrightarrow X$ et l'application r sont des équivalences d'homotopie, inverses l'une de l'autre. Le concept de « rétraction », en réalité, nous est surtout utile parce que ce sont les équivalences d'homotopie que l'on peut dessiner !

Voici un autre genre d'exemple :

Exemple 1.4.10. Si $f, g\colon [0,1] \longrightarrow X$ sont deux « chemins » tels que $f(0) = g(0)$ et $f(1) = g(1)$, dire que f et g sont homotopes rel $\{0,1\}$ signifie qu'il existe une homotopie $F\colon [0,1]^2 \longrightarrow X$ entre les deux (donc $F(t,0) = f(t)$, $F(t,1) = g(t)$) avec $F(0,t) = f(0) = g(0)$ et $F(1,t) = f(1) = g(1)$.



L'étude des homotopies entre chemins est au cœur de notre cours, mais il va falloir attendre le chapitre suivant pour attaquer ça sérieusement.

Proposition 1.4.11.

1. *La relation d'homotopie est une relation d'équivalence sur l'ensemble des fonctions continues $X \longrightarrow Y$. La classe de f est notée $[f]$, et l'ensemble des classes d'homotopie est noté $[X,Y]$.*
2. *Fixons $A \subset X$ et $y_0 \in Y$. La relation d'homotopie rel A est une relation d'équivalence sur l'ensemble des fonctions continues $X \longrightarrow Y$ qui sont constantes sur A de valeur y_0. La classe de f est notée $[f]$, et l'ensemble des classes d'homotopie est noté $[(X,A),(Y,y_0)]$.*
3. *La classe $[g \circ f]$ ne dépend que de $[g]$ et de $[f]$.*

Démonstration. (1) C'est l'occasion de revoir la définition d'une relation d'équivalence, qui va beaucoup intervenir dans la suite. On doit vérifier la réflexivité, c'est-à-dire que $f\colon X \longrightarrow Y$ est homotope à elle-même ; or, il suffit de prendre l'homotopie $F(x,t) = f(x)$. Ensuite, voyons la symétrie ; on se donne une homotopie F entre f et g, et on doit construire une homotopie entre g et f. Or, il suffit de définir F' par $F'(x,t) = F(x, 1-t)$.

Enfin, voyons la transitivité. Soit F une homotopie entre f et g, et soit G une homotopie entre g et h, où $f, g, h\colon X \longrightarrow Y$. On va « couper $[0,1]$ en deux, faire d'abord F deux fois plus vite, puis G deux fois plus vite » (une idée qui va revenir, là encore). Concrètement, on pose pour $(x,t) \in X \times [0,1]$:

$$H(x,t) = \begin{cases} F(x,2t) & \text{pour } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ G(x,2t-1) & \text{pour } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \,. \end{cases}$$

Ceci a un sens, car $F(x,1) = G(x,0) = g(x) = H(x,\frac{1}{2})$, et nous sommes donc en présence d'une fonction $H\colon X \times [0,1] \longrightarrow Y$ telle que $H(x,0) = f(x)$ et $H(x,1) = h(x)$. Il reste simplement à vérifier que H est continue pour conclure que f et h sont homotopes. Or, par continuité de F on constate que H est continue sur $X \times [0,\frac{1}{2}]$, et de même H est continue sur $X \times [\frac{1}{2},1]$ par continuité de G. Le « lemme du recollement », que l'on va voir dans les exercices (si vous ne le connaissez pas déjà) nous dit bien que H est continue.

(2) est similaire, laissé en exercice.

(3) Si F est une homotopie entre f_0 et f_1, et si G est une homotopie entre g_0 et g_1, où $f_i\colon X \longrightarrow Y$ et $g_i\colon Y \longrightarrow Z$, alors on pose $H(x,t) = G(F(x,t),t)$. Cette application $H\colon X \times [0,1] \longrightarrow Z$ est continue, et $H(x,0) = G(F(x,0),0) = g_0(f_0(x))$, alors que $H(x,1) = G(F(x,1),1) = g_1(f_1(x))$. Donc $g_0 \circ f_0 \simeq g_1 \circ f_1$. $\square$

La théorie de l'homotopie est un vaste sujet, dans lequel les questions de topologie, évoquées ci-dessus, ont leur pendant : par exemple il est naturel de se demander si S^n et S^m peuvent avoir le même type d'homotopie avec $n \neq m$. Là encore, la réponse est non, mais c'est difficile à prouver, et nous allons mettre du temps avant d'y arriver. Dans la première partie nous montrerons simplement que S^1 n'a pas le type d'homotopie de S^n pour $n \neq 1$. (Par contre, les différents espaces $\mathbf{R}^n$ sont tous contractiles, quel que soit n, et donc ils ont le même type d'homotopie, qui est celui d'un point.) Nous montrerons aussi que la sphère et le tore n'ont pas le même type d'homotopie. A vrai dire, puisque notre principal outil, le fameux « groupe fondamental » que l'on définira au chapitre suivant, est un invariant d'homotopie, tous nos résultats concernent directement l'homotopie des espaces, et les résultats sur l'existence ou non d'homéomorphismes sont des conséquences.

1.5. Actions de groupes

Nous avons besoin d'outils pour définir de nouveaux espaces facilement. On va se pencher sur le cas d'un espace métrique X muni d'une action du groupe G : on rappelle que, par définition, ceci signifie qu'on a une application

$$G \times X \longrightarrow X \,,$$

notée $(g,x)\mapsto g\cdot x$ en général, telle que $g\cdot(h\cdot x)=gh\cdot x$ (pour $g,h\in G, x\in X$) et $1\cdot x=x$ (on écrit systématiquement 1 pour l'élément neutre de G). Dans cette situation, on va s'intéresser au quotient

$$X/G=\{G\cdot x \mid x\in X\}\,,$$

l'ensemble des orbites de G dans X. Ici on a écrit

$$G\cdot x=\{g\cdot x \mid g\in G\}\subset X\,.$$

Très souvent, on écrira $\overline{x}$ à la place de $G\cdot x$.

Définition 1.5.1. On dit que G agit *isométriquement*, ou *par isométries*, ou que *l'action de G est isométrique* sur l'espace métrique X lorsque

$$d(g\cdot x, g\cdot y)=d(x,y)$$

pour $g\in G, x,y\in X$. On dira également que *l'action est fermée* si chaque orbite $G\cdot x$, pour $x\in X$, est une partie fermée de X.

Exemple 1.5.2. Prenons $X=\mathbf{C}$, et $G=S^1$, qui est bien un groupe. On fait agir G par multiplication, c'est-à-dire $g\cdot x=gx$. Si $g=\exp(i\theta)$ avec $\theta\in\mathbf{R}$, alors l'action de g est la rotation d'angle θ, dont on sait bien que c'est une isométrie (et ça se démontre immédiatement : $|gx-gy|=|g||x-y|=|x-y|$ puisque $|g|=1$). Donc l'action est isométrique. Par ailleurs, l'orbite de $x\in\mathbf{C}$ est le cercle de centre 0 et de rayon $|x|$, qui est bien sûr fermé dans $\mathbf{C}$. Donc l'action est également fermée. Au passage, on note que X/G est naturellement en bijection avec $[0,+\infty[$, chaque cercle étant repéré par son rayon.

Si maintenant on prend $G=\mathbf{C}^*$, agissant sur le même X, alors on voit d'abord que l'action n'est pas isométrique : les distances sont multipliées par $|g|$. Mais on constate aussi que les orbites ne sont pas fermées. En fait il y en a juste deux, à savoir $\{0\}$ et $\mathbf{C}^*$; l'adhérence de cette dernière est $\mathbf{C}$ tout entier, donc elle n'est pas fermée. Cette action n'est ni isométrique, ni fermée. Le quotient X/G possède deux points, dont peut dire intuitivement que « un seul est fermé », et on va considérer ça comme pathologique.

Définition 1.5.3. On suppose que l'espace métrique X est équippé d'une action fermée et isométrique de G. Pour $\alpha,\beta\in X/G$, on pose alors

$$\delta(\alpha,\beta)=\inf_{a\in\alpha, b\in\beta} d(a,b)\,,$$

où d est la distance sur X.

Lemme 1.5.4. *Dans la situation de la définition précédente, on a :*

1. *Si $a_0 \in \alpha$, alors*
$$\delta(\alpha, \beta) = \inf_{b \in \beta} d(a_0, b)\,.$$

2. *La fonction δ est une distance sur X/G.*

Démonstration. (1) Fixons $a_0 \in \alpha$. Si $a \in \alpha$ et $b \in \beta$, alors on peut trouver $g \in G$ tels que $a = g \cdot a_0$, et donc

$$d(a, b) = d(g \cdot a_0, g \cdot (g^{-1} \cdot b)) = d(a_0, g^{-1} b)$$

puisque G agit par isométries. On en déduit, puisque $g^{-1}b \in \beta$, que

$$\{d(a, b) \mid a \in \alpha, b \in \beta\} = \{d(a_0, b) \mid b \in \beta\}\,,$$

et en prenant l'inf de l'ensemble, de chaque côté de cette équation, on a bien $\delta(\alpha, \beta) = \inf_{b \in \beta} d(a_0, b)$.

(2) Commençons par le plus difficile : montrons que $\delta(\alpha, \beta) = 0 \implies \alpha = \beta$. Supposons donc que $\delta(\alpha, \beta) = 0$, prenons $a_0 \in \alpha$, et utilisons le (1) : on a

$$\inf_{b \in \beta} d(a_0, b) = 0\,.$$

Cela signifie qu'il existe une suite $(b_n)_{n \geq 0}$ d'éléments de β convergeant vers a_0. Or, β est supposé fermé, donc $a_0 \in \beta$. Ainsi, $\alpha \cap \beta \neq \emptyset$, et $\alpha = \beta$ (ce sont des orbites).

La réciproque $\alpha = \beta \implies \delta(\alpha, \beta) = 0$ est ici évidente, de même que la symétrie $\delta(\alpha, \beta) = \delta(\beta, \alpha)$. Il reste donc à montrer l'inégalité triangulaire. Prenons $a \in \alpha, b \in \beta$ et $c \in \gamma$, où α, β et γ sont des orbites de G. Alors

$$d(a, b) \leq d(a, c) + d(c, b)$$

puisque d est une distance. Ainsi, pour chaque c fixé, on a

$$\delta(\alpha, \beta) \leq \inf_{a, b} (d(a, c) + d(c, b))\,,$$

d'où

$$\delta(\alpha, \beta) \leq \inf_{c} \inf_{a, b} (d(a, c) + d(c, b)) \leq \inf_{a, c} d(a, c) + \inf_{b, c} d(c, b) = \delta(\alpha, \gamma) + \delta(\gamma, \beta)\,.$$

(On a utilisé une propriété basique des inf : si X et Y sont des parties de $\mathbf{R}$, et si on écrit $X + Y := \{x + y \mid x \in X, y \in Y\}$, alors $\inf(X + Y) \leq \inf(X) + \inf(Y)$.)

On a bien montré que δ est une distance. $\square$

Exemple 1.5.5. Revenons à l'exemple de $G = S^1$ qui agit sur $X = \mathbf{C}$. L'orbite de $x \in \mathbf{C}$ est le cercle de centre 0 et de rayon $|x|$, qui contient en particulier le réel $|x|$. Pour calculer $\delta(G \cdot x, G \cdot y)$, on remarque que le point sur $G \cdot y$ qui est le plus proche de $|x|$ doit être réel, et donc doit être $|y|$; d'après le (1) du lemme, on a donc

$$\delta(G \cdot x, G \cdot y) = ||y| - |x|| \ .$$

On constate que l'application $X/G \longrightarrow [0, +\infty[$ qui envoie $G \cdot x$ sur $|x|$ est non seulement une bijection, mais aussi une isométrie.

Lemme 1.5.6. *Soit X un espace métrique avec une action fermée et isométrique de G.*

1. *L'application quotient $p \colon X \longrightarrow X/G$ est continue et ouverte.*
2. *Pour toute partie $U \subset X/G$, on a $p^{-1}(U)$ ouvert $\Longleftrightarrow$ U ouvert.*

Démonstration. (1) Par définition $\delta(p(a), p(b)) \leq d(a, b)$ pour $a, b \in X$, donc p est contractante ($=$ 1-lipschitzienne, ou tout autre nom que vous préférez). Elle est donc continue. Montrons qu'elle est ouverte.

Commençons par montrer que pour tout $a \in X$ et $r > 0$, on a $p(B(a, r)) = B(p(a), r)$. Si $d(x, a) < r$, alors $d(p(x), p(a)) < r$ car p est contractante, donc $p(B(a, r)) \subset B(p(a), r)$. Voyons l'inclusion réciproque ; soit $\beta \in B(p(a), r)$. Il s'agit de montrer qu'il existe $b \in B(a, r)$ tel que $p(b) = \beta$, c'est-à-dire tel que $b \in \beta$.

Or, si on note $\alpha = p(a)$, on a $\delta(\alpha, \beta) < r$, et par le (1) du lemme précédent, on a l'inégalité

$$\inf_{b \in \beta} d(a, b) < r \, ,$$

ce qui montre bien qu'il existe au moins un $b \in \beta$ tel que $d(a, b) < r$. On a bien montré l'inclusion réciproque.

Montrons donc que p est ouverte. Soit U un ouvert de X, et $a \in U$. Par définition, il existe $r > 0$ tel que $B(a, r) \subset U$, et donc $p(U)$ contient $p(B(a, r)) = B(p(a), r)$. Puisque $p(U)$ contient une boule autour de chacun de ses points, c'est un ouvert.

(2) Si U est ouvert dans X/G, alors $p^{-1}(U)$ est ouvert dans X, par la continuité de p. Voyons la réciproque, et supposons que $p^{-1}(U)$ est ouvert dans X, pour une partie U de X/G. Puisque p est ouverte, on sait que $p(p^{-1}(U))$ est ouvert, mais p est aussi surjective, donc $p(p^{-1}(U)) = U$. □

Remarques 1.5.7.

1. Il est remarquable que, dans toute la suite, les arguments vont être basés sur ce lemme, *et ne ferons jamais référence à la distance δ*, pas plus qu'à d d'ailleurs.

2. De manière plus abstraite, on voit grâce au (2) que les ensembles ouverts dans X/G sont connus : ce sont les U tels que $p^{-1}(U)$ est ouvert. Dans le cas tout-à-fait général d'une action de G sur l'espace topologique X, sans hypothèse aucune, on peut utiliser ça comme définition d'une topologie sur X/G. Nous explorons ça dans le chapitre de compléments qui suit.
3. Voici sans attendre l'exception qui confirme la règle : une petite observation qui est très claire à partir de la définition de la distance δ, et qui nous entraînerait dans des contorsions maladroites si on voulait la démontrer en raisonnant juste sur la topologie de X/G (essayez !). On suppose donc que X et G sont comme ci-dessus (action fermée et isométrique), et on note δ_X pour la distance que l'on a définie sur X/G. Maintenant, soit $A \subset X$ une partie qui est stable par l'action de G (on ne suppose pas que A est fermée, ni qu'elle est ouverte, ni rien). Alors on peut parler de A/G avec sa fonction distance δ_A. L'observation est celle-ci : $A/G \subset X/G$, et δ_A n'est rien d'autre que la restriction de δ_X. Si $p\colon X \longrightarrow X/G$ est l'application naturelle, alors $p(A) = A/G$ (c'est à la fois une égalité entre deux parties de X/G, et une identification de deux espaces métriques). En bref, il n'y a pas de piège. Pour les quotients plus compliqués, comme on en rencontre au chapitre suivant, des subtilités surgissent. (Ceux que ça amuse pourront aller consulter le lemme 2.2.4.)

Lemme 1.5.8. *Soit X avec une action fermée et isométrique de G, et soit $p\colon X \longrightarrow X/G$ l'application quotient. On suppose que $f : X \longrightarrow Y$ est une application continue vers l'espace Y, telle que $f(g \cdot x) = f(x)$ pour tout $g \in G, x \in X$, de sorte qu'il existe une unique application $\overline{f}\colon X/G \longrightarrow Y$ telle que $f(x) = \overline{f}(p(x))$. Alors :*

1. *$\overline{f}$ est continue.*
2. *$\overline{f}$ est ouverte si et seulement si f est ouverte.*
3. *Supposons que $\overline{f}$ est une bijection. Alors $\overline{f}$ est un homéomorphisme si et seulement si f est ouverte.*

Démonstration. (1) Écrivons $g = \overline{f}$ (car $\overline{f}^{-1}$ est difficile à lire). Soit U un ouvert de Y, il faut montrer que $g^{-1}(U)$ est ouvert dans X/G. D'après le (2) du lemme 1.5.6, ceci revient exactement à vérifier si $p^{-1}(g^{-1}(U)) = (p \circ f)^{-1}(U) = f^{-1}(U)$ est ouvert. Or, f étant supposée continue, c'est le cas. Ainsi, g est continue.

(2) Supposons que f est ouverte, et soit V ouvert dans X/G. On a $V = p(p^{-1}(V))$ car p est surjective ; donc $g(V) = f(p^{-1}(V))$. Mais $p^{-1}(V)$ est ouvert par continuité de p, et f est ouverte, donc $g(V)$ est ouvert. Ceci montre bien que g est une application ouverte.

Réciproquement, supposons que g est ouverte, et soit V ouvert dans X. Alors $f(V) = g(p(V))$. Mais p est une application ouverte par le lemme 1.5.6, et g aussi, donc $f(V)$ est ouvert. On a montré la réciproque.

(3) Finalement, si g est une bijection, alors c'est un homéomorphisme exactement si c'est une application ouverte (par définition de « homéomorphisme », puisqu'on a déjà deux conditions et qu'il reste à voir la troisième). Donc le point (3) est une simple conséquence du (2). $\square$

Exemple 1.5.9. Voici un exemple fondamental. On prend $G = \mathbf{Z}$ qui agit sur $\mathbf{R}$ par $n \cdot x = n + x$. C'est bien une action fermée et isométrique (pour la distance euclidienne, disons). Soit $p \colon \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ l'application quotient.

On considère alors $f \colon \mathbf{R} \longrightarrow S^1$ définie par $f(x) = \exp(2i\pi x)$. Alors f est continue, on a bien $f(n + x) = f(x)$, donc on a en notre possession une application continue $\overline{f} \colon \mathbf{R}/\mathbf{Z} \longrightarrow S^1$. Les propriétés basiques de l'exponentielle montrent que $\overline{f}$ est une bijection.

Or, on peut voir que f est également ouverte – ou ce qui revient exactement au même grâce au lemme, que $\overline{f}$ est un homéomorphisme. Une première façon de le montrer serait par le calcul différentiel (une variante du « théorème d'inversion locale »).

C'est un bon argument, mais en voici un autre. Puisque S^1 est métrique, donc séparé, il suffit de montrer que $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ est compact, en vertu du théorème 1.1.13. Or $[0, 1]$ est compact, et après une seconde de réflexion, on s'aperçoit que $p([0, 1]) = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ tout entier (tout $x \in \mathbf{R}$ s'écrit $x = n + d$ avec $n \in \mathbf{Z}$ et $d \in [0, 1]$, donc $x = n \cdot d$ et $p(x) = p(d)$). Donc $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ est compact (image d'un compact par une application continue).

On retient que $\mathbf{R}/\mathbf{Z} \cong S^1$.

Exemple 1.5.10. Une remarque qui reviendra souvent est la suivante. On suppose que G agit sur X, et que H agit sur Y, dans les deux cas avec une action fermée et isométrique. Si $p \colon X \longrightarrow X/G$ et $q \colon Y \longrightarrow Y/H$ sont les applications de passage au quotient, alors on peut regarder

$$f = p \times q \colon X \times Y \longrightarrow X/G \times Y/H\,.$$

Alors f est ouverte puisque p et q le sont. De plus, $G \times H$ agit sur $X \times Y$, de façon fermée et isométrique, et f est compatible avec l'action, c'est-à-dire $f((g, h) \cdot (x, y)) = f(g \cdot x, h \cdot y) = f(x, y)$. On peut donc considérer

$$\overline{f} \colon (X \times Y)/(G \times H) \longrightarrow X/G \times Y/H\,.$$

C'est une bijection continue, et une application ouverte, donc c'est homéomorphisme. Dans la suite, on va en général traiter $\overline{f}$ comme l'identité, et on ne fera pas de différence entre $(X \times Y)/(G \times H)$ et $X/G \times Y/H$ (ça va nous économiser *beaucoup* de notations...).

En particulier, on peut prendre pour H le groupe trivial qui agit sur n'importe quel Y. On identifie alors $(X \times Y)/G$ avec $(X/G) \times Y$, où G agit sur $X \times Y$ par $g \cdot (x, y) = (g \cdot x, y)$.

Exemple 1.5.11. L'espace topologique $\mathbf{R}^2$ est aussi un groupe, il possède le sous-groupe $\mathbf{Z}^2$, qui agit sur lui par translations. C'est une action fermée et isométrique. D'après l'exemple précédent, on peut identifier $\mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$ avec $(\mathbf{R}/\mathbf{Z})^2$. Et l'exemple immédiatement avant celui-ci montre finalement que $\mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2 \cong S^1 \times S^1$.

Ce dernier exemple mérite qu'on fasse quelques dessins. Avant ça, on va introduire la définition de « domaine fondamental » d'une action. Attention, cette définition change d'un auteur à l'autre. Pour nous, ça sera juste un guide pour l'intuition, afin de mieux comprendre un quotient X/G, et nous n'allons pas donner de résultats fins sur les domaines fondamentaux.

Définition 1.5.12. On suppose que G agit sur X, et on note $p \colon X \longrightarrow X/G$ l'application quotient. Un *domaine fondamental* pour l'action est un ouvert $U \subset X$ tel que

1. la restriction de p à U est injective,
2. la restriction de p à $\overline{U}$ est surjective.

Puisque p est une application ouverte (dans le cas qui nous intéresse d'une action fermée et isométrique), la condition (1) signifie que p induit un homéomorphisme $U \longrightarrow p(U)$, donc il y a déjà un ouvert dans X/G, à savoir $p(U)$, que l'on « comprend ». La condition (2), quant à elle, nous indique que $p(\overline{U}) = X/G$ en entier, et en particulier, on en déduit que $p(U)$ est dense dans X/G (on visualise donc un « gros bout » de X/G).

On va alors penser à X/G comme à $\overline{U}$ « sur lequel on a fait des identifications », c'est-à-dire qu'on va étudier les $u, v \in \overline{U}$ tels que $p(u) = p(v)$. Voyons ça sur un exemple.

Exemple 1.5.13. On retourne à l'exemple 1.5.11, et on va trouver un domaine fondamental (nous ne donnerons aucun résultat général sur l'existence ou l'unicité de ces domaines, on se contente de faire remarquer qu'il est agréable d'en connaître un). Prenons $U =]0, 1[\times]0, 1[$, qui est bien un ouvert de $\mathbf{R}^2$. Il est clair que p est injective sur U (quand deux points sont dans la même orbite, leurs coordonnées diffèrent d'un entier). Et $\overline{U} = [0, 1]^2$, de sorte que $p(\overline{U}) = \mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$ est vrai pour les mêmes raisons qui font que $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ est l'image de $[0, 1]$ (cf exemple 1.5.9).

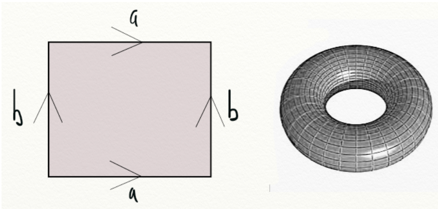
On peut donc penser à $T := \mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$, intuitivement, comme au carré $\overline{U}$ sur lequel on a fait des identifications. Lesquelles ? Il faut étudier les $u, v \in \overline{U}$ tels que $p(u) = p(v)$. Un rapide examen nous révèle que, si $u \neq v$, les seules identifications sont

$$p(x, 0) = p(x, 1) \text{ pour } 0 \leq x \leq 1\,,$$

et

$$p(0, y) = p(1, y) \text{ pour } 0 \leq y \leq 1\,.$$

On résume la situation par le dessin suivant.



On pense désormais à T, que l'on appelle le *tore*, comme à un carré dont on a identifié les côtés opposés.

Concluons avec quelques remarques sur les homotopies, en interaction avec les actions de groupes. On reprend l'observation de l'exemple 1.5.10, et notamment l'identification

$$(X \times [0, 1])/G \longrightarrow X/G \times [0, 1]\,,$$

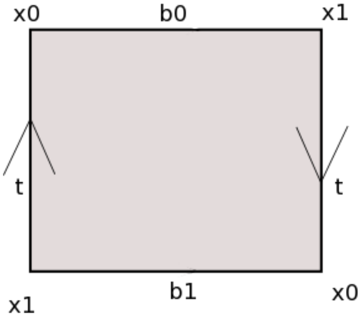
dans le cas d'une action fermée et isométrique. On constate que, pour construire une homotopie entre deux applications $X/G \longrightarrow Y$, il suffit de constuire une homotopie $F\colon X \times [0, 1] \longrightarrow Y$ qui est compatible avec l'action, dans le sens où

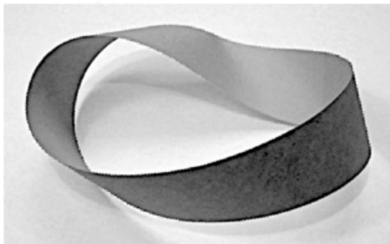
$$F(g \cdot x, t) = F(x, t)\,,$$

pour $g \in G$, $x \in X$, $t \in [0, 1]$. Il suffit alors d'appliquer le lemme 1.5.8. Voici un exemple typique, qui montre qu'une telle homotopie s'obtient souvent en « deux temps ».

Exemple 1.5.14. Prenons $X = \mathbf{R} \times [-1, 1] \subset \mathbf{C}$, et soit $\varphi\colon X \longrightarrow X$ définie par $\varphi(z) = 1 + \overline{z}$. On fait agir $G = \mathbf{Z}$ sur X par $n \cdot z = \varphi^{\circ n}(z)$. Alors l'action est isométrique (φ s'obtient en composant la symétrie par rapport à l'axe horizontal et une translation) et fermée (en fait chaque orbite est un ensemble discret, comme vous le vérifierez).

Soit maintenant $U =]0, 1[\times [-1, 1]$. À titre d'exercice, vous montrerez que U est un domaine fondamental, et que les identifications sont comme ci-dessous :

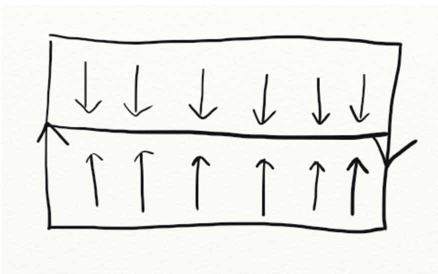




Il faut s'habituer à ces raccourcis : la lettre t apparaît deux fois, pour indiquer que les deux segments sont identifiés ; la flèche précise quelle identification on prend (vous fournirez les détails vous-mêmes) ; les étiquettes b_0 et b_1 sont bien différentes, pour indiquer que les segments ne sont *pas* identifiés (c'est b comme « bord », au fait) ; et enfin, les deux x_0, et les deux x_1, sont bien identifiés.

On note $M := X/G$, et on l'appelle *le ruban de Moebius*. Intuitivement, on prend un rectangle, et on identifie deux côtés, en « tordant ».

Montrons maintenant que M a le type d'homotopie d'un cercle. L'idée est claire sur le dessin suivant :



Formellement, on définit d'abord (premier temps)

$$F\colon X \times [0,1] \longrightarrow X$$

par $F(x+iy,t) = x+tiy$. Alors $z \mapsto F(z,1)$ est l'identité, alors que $z \mapsto F(z,0)$ envoie X sur l'axe horizontal $A = \{(x,0) \mid x \in \mathbf{R}\}$, c'est-à-dire qu'on a construit pour l'instant une rétraction de X sur A (en remarquant que F est évidemment continue).

Ensuite, (deuxième temps) on considère $p \circ F\colon X \times [0,1] \longrightarrow M$, où $p\colon X \longrightarrow M$ est l'application quotient, comme d'habitude. On constate que $F(g \cdot z, t) = g \cdot F(z,t)$ pour $g \in G$ (il suffit de le vérifier pour un générateur de G), et donc $p \circ F(g \cdot z, t) = p \circ F(z,t)$ pour $(z,t) \in X \times [0,1]$ et $g \in G$. Ainsi $p \circ F$ « passe au quotient ». En d'autres termes, il existe

$$H\colon (X \times [0,1])/G = M \times [0,1] \longrightarrow M$$

telle que $H(p(z),t) = p \circ F(z,t)$, et H est continue (par le lemme 1.5.8). En regardant de plus près, on voit que cette homotopie H réalise une rétraction de M sur $p(A)$.

Reste à décrire $p(A)$. La partie A étant stable par l'action de G, on a $p(A) = A/G$ (cf le (3) de la remarque 1.5.7). On a bien sûr $A \cong \mathbf{R}$, et l'action de G est bien celle pour laquelle nous avons établi que $\mathbf{R}/\mathbf{Z} \cong S^1$, et donc $p(A) \cong S^1$. Le ruban de Moebius se rétracte bien sur un cercle.

1.6. Exercices

Exercice 1. Montrer que deux intervalles ouverts non-vides de $\mathbf{R}$ sont toujours homéomorphes. On pourra commencer par montrer que la relation « être homéomorphe » est une relation d'équivalence.

Exercice 2.
1. Soit Y un espace topologique, et $X \subset Y$. Montrer que l'ensemble des parties de X de la forme $U \cap X$, où U est ouvert dans Y, est une topologie sur X.
2. Si Y est en fait un espace métrique, montrer que la topologie induite sur X (comme dans la question précédente) est tout simplement celle donnée par la restriction de la distance de Y.

Exercice 3. Soit Y un espace métrique et $X \subset Y$ une partie compacte. Montrer directement, en utilisant des suites, que X est fermée dans Y.

Exercice 4. Soit X un espace topologique compact. Montrer que :

1. Si $F \subset X$ est fermé, alors F est compact ;
2. Si $f\colon X \longrightarrow Y$ est continue, alors $f(X)$ est compact (pour la topologie induite par Y).

On pourra le faire pour des espaces métriques d'abord, puis passer au cas général.

Exercice 5. Écrire les 26 lettres de l'alphabet, vues comme des parties de $\mathbf{R}^2$, et repérer lesquelles sont homéomorphes (la réponse dépend de votre écriture).

Vous pourrez ensuite essayer de regrouper les lettres par type d'homotopie (après avoir lu le passage correspondant). Pour démontrer que deux lettres n'ont pas le même type d'homotopie, vous allez parfois trouver qu'il est difficile d'être rigoureux. Les outils des chapitres suivants, et le groupe fondamental en particulier, vous permettront de terminer ce travail.

Exercice 6. Soit U un ouvert de $\mathbf{R}^n$ contenant 0 et *étoilé en* 0, c'est-à-dire que pour tout $u \in U$, on a $[0, u] \subset U$. Montrer par des exemples qu'un rayon émanant de 0 peut intersecter ∂U en plusieurs points, et que ∂U n'est pas forcément homéomorphe à S^{n-1}.

Exercice 7 (Le lemme du recollement). Soit X et Y des espaces topologiques. On suppose que $X = A \cup B$, et que $f\colon X \longrightarrow Y$ est une fonction dont la restriction à A ou à B est continue.

1. Si A et B sont tous les deux ouverts, montrer que f est continue sur X.
2. Même chose en supposant que A et B sont tous les deux fermés.
3. Même chose avec A ouvert et B fermé ?

Exercice 8. *En discutant des homotopies, nous avons parlé de* $X \times [0, 1]$, *et sous-entendu que c'était un espace topologique. Selon ce que vous avez fait précisément en L3, c'est peut-être plus ou moins évident, donc voici un exercice pour éclaircir les choses.*

Soit X et Y des espaces topologiques. On définit une topologie sur $X \times Y$ en déclarant que $\Omega \subset X \times Y$ est ouvert si et seulement si c'est une union d'ensembles de la forme $U \times V$, avec U ouvert dans X et V ouvert dans Y.

1. Vérifier que c'est bien une topologie.
2. Si X et Y sont des espaces métriques, proposer plusieurs distances « naturelles » sur $X \times Y$, et vérifier qu'elles donnent toutes la même topologie, qui est celle ci-dessus.
3. Vérifier que les projections $p\colon X \times Y \longrightarrow X$, $p(x, y) = x$ et $q\colon X \times Y \longrightarrow Y$, $q(x, y) = y$, sont continues.
4. Vérifier que, si Z est un autre espace topologique et si $f\colon Z \longrightarrow X \times Y$ est une fonction, alors f est continue si et seulement si $p \circ f$ et $q \circ f$ sont continues.

Exercice 9 (La projection stéréographique). Sur la sphère $S^n \subset \mathbf{R}^{n+1}$, nous appellerons « pôle nord » le point $N = (0, 0, \ldots, 0, 1)$ et « pôle sud » le point $S = (0, 0, \cdots, 0, -1)$. Compléter l'esquisse suivante. Soit P le plan tangent à S^n dans $\mathbf{R}^{n+1}$, passant par le « pôle sud » ; tirer une droite passant par le « pôle nord » et par un point x de la sphère, alors elle coupe P en un point $p(x)$. Ceci donne un homéomorphisme $S^n - \{N\} \longrightarrow P \cong \mathbf{R}^n$, que l'on appelle la projection stéréographique.

Exercice 10. Trouver une partie de $\mathbf{R}^3$ homéomorphe à $S^1 \times S^1$.

Exercice 11. Soit $A \subset \mathbf{R}^2$ l'union du cercle de centre $x_1 = (0,0)$ et de rayon 1 et du cercle de centre $x_2 = (2,0)$ et de rayon 1 (qui est tangent au précédent). Par ailleurs soit $X = \mathbf{R}^2 - \{x_1, x_2\}$. Montrer par un dessin qu'il existe une rétraction de X sur A.

Exercice 12. Soit $T = \mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$ le tore, comme dans le cours. On note

$$A = \{(x,y) \mid x \in \mathbf{Z} \text{ ou } y \in \mathbf{Z}\} \subset \mathbf{R}^2\,,$$

et

$$C = \left\{(n+\frac{1}{2}, m+\frac{1}{2}) \mid n,m \in \mathbf{Z}\right\} \subset \mathbf{R}^2\,.$$

1. Montrer par un dessin qu'il existe une rétraction de $\mathbf{R}^2 - C$ sur A, qui est compatible avec l'action de $\mathbf{Z}^2$.
2. Soit $p\colon \mathbf{R}^2 \longrightarrow T$ l'application quotient. À l'aide de la question précédente, décrire le type d'homotopie de $T - p(C)$ le mieux possible.

Exercice 13 (Le plan projectif réel). Soit I l'identité de $\mathbf{R}^{n+1}$. Le groupe à deux éléments $G = \{\pm I\}$ agit sur la sphère S^n, et on note $\mathbf{R}P^n := S^n/G$. Cet espace est appelé *l'espace projectif réel de dimension* n, et pour $n = 2$, on dit que $\mathbf{R}P^2$ est *plan projectif réel.* On voit aussi souvent la notation $\mathbf{P}^n(\mathbf{R})$, mais pas dans les livres de topologie.

1. Montrer que l'action de G est discrète.
2. Trouver un domaine fondamental. Pour $n = 2$, utiliser ce domaine pour montrer que l'on peut penser à $\mathbf{R}P^2$ comme à un carré sur lequel on a fait des identifications au bord (un peu comme le tore ; voir page **??** pour la réponse, si vous bloquez, mais attention, vous aurez aussi une partie de la solution de l'exercice suivant).

Exercice 14 (La bouteille de Klein). Soit G le sous-groupe du groupe de toutes les isométries de $\mathbf{R}^2$ engendré par α et β, où

$$\alpha(x,y) = (x+1, y)$$

et

$$\beta(x,y) = (1-x, y+1)\,.$$

1. Montrer que $\beta^{-1}\alpha\beta = \alpha^{-1}$.
2. Montrer que tout élément de G s'écrit $\alpha^n\beta^m$ avec n et m uniques. *En fait G est un produit semi-direct $\mathbf{Z} \rtimes \mathbf{Z}$, si vous savez ce que c'est.*
3. Montrer que l'action est fermée.
4. Montrer que $U =]0,1[^2$ est un domaine fondamental.
5. Décrire $K = \mathbf{R}^2/G$ de la manière la plus concrète possible. Là encore, on montrera que l'on peut penser à cet espace comme à un carré avec des identifications au bord, et en page **??** vous avez la réponse.

   L'espace K est appelé la bouteille de Klein.

Chapitre 2

Topologie quotient et applications

Il est souvent utile de disposer de « quotients » plus généraux que ceux faisant intervenir les actions de groupe du chapitre précédent. Au minimum, on pourrait étudier les actions qui ne sont pas isométriques. On aimerait aussi pouvoir rendre rigoureux une construction du genre « le tore est défini comme un carré avec ses côtés identifiés », et nous allons voir qu'il s'agit bel et bien d'une forme de quotient. Enfin, nous allons utiliser des quotients pour construire des équivalences d'homotopie : considérer la figure 2.1, qui représente un espace en forme d'haltère composé de deux cercles et d'un segment, ainsi qu'un autre espace formé par deux cercles tangents. Il est assez intuitif que ces deux-là ont le même type d'homotopie, mais les définitions étant ce qu'elles sont, il n'est pas si simple de le démontrer. À la fin du chapitre, nous dirons que le « huit » s'obtient comme quotient de « l'haltère » en écrasant le segment au milieu, et que cette opération ne change pas le type d'homotopie.

Toutes ces considérations nous emmènent naturellement en dehors du monde des espaces métriques. Le paradoxe apparent de ce chapitre est donc que nous allons developper des outils de topologie générale, assez abstraits, ceci dans le but de pouvoir pratiquer des opérations très intuitives, comme écraser une partie d'un espace. Le paradoxe n'est que psychologique : un espace topologique est bien quelque chose de *plus simple* qu'un espace métrique, conceptuellement. Toutefois, comme il faut du temps pour s'habituer à ces choses, et que les étudiants de M1 qui ont ouvert ce livre ne disposent pas forcément de ce temps, ce chapitre est optionnel : vous pouvez lire au moins les quatre chapitres suivants sans avoir besoin de celui-ci. (Une grande partie du livre, à vrai dire, peut se comprendre sans

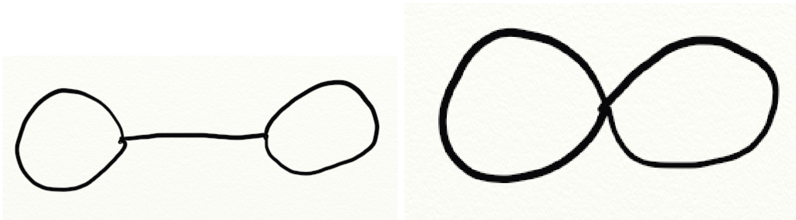


Figure 2.1. Ces deux espaces ont le même type d'homotopie, mais comment le démontrer formellement ?

la topologie quotient, mais il devient de plus en plus compliqué de s'en passer à mesure qu'on avance.)

2.1. Topologie quotient

Tout commence par la définition suivante (on rappelle qu'une relation d'équivalence, sur un ensemble, est une relation réflexive, symétrique, et transitive).

Définition 2.1.1. Soit X un espace topologique, et soit $\sim$ une relation d'équivalence sur X. On note $Y = X/\sim$ l'ensemble des classes d'équivalence, et $p : X \longrightarrow Y$ l'application canonique (qui à un élément x associe sa classe d'équivalence $p(x)$). La *topologie quotient* sur Y est définie comme suit : une partie $U \subset Y$ est déclarée ouverte si et seulement si $p^{-1}(U)$ est ouverte dans X.

Il faut évidemment vérifier que nous avons bien une topologie (compatibilité avec les unions et les intersections finies, etc), mais c'est tout-à-fait évident. Cette définition est posée précisément pour que la proposition suivante soit vraie :

Lemme 2.1.2. *Soit $f : X \longrightarrow Z$ une application continue, et soit $\sim$ une relation d'équivalence sur X, avec* p *et Y comme ci-dessus. On suppose que $f(x) = f(x')$ lorsque $x \sim x'$. Alors il existe une unique application continue $g : Y \longrightarrow Z$ telle que $f(x) = g(p(x))$.*

Démonstration. L'application g est clairement unique, la seule question étant sa continuité. Soit donc U un ouvert de Z, il faut montrer que $g^{-1}(U)$ est ouvert. Par définition de la topologie sur $X/\sim$, il faut vérifier si $p^{-1}(g^{-1}(U))$ est ouvert ; or cet ensemble est précisément $f^{-1}(U)$, qui est ouvert car f est continue. □

Exemple 2.1.3. Lorsque G est un groupe agissant sur X, on peut définir $x \sim y \iff G \cdot x = G \cdot y$; c'est bien une relation d'équivalence, et $X/\sim\, = X/G$. On a donc toujours une topologie sur X/G, sans faire d'hypothèse supplémentaire.

Ceci étant, dans le cas où l'action est fermée et isométrique, le point (2) du lemme 1.5.6 nous affirme que la topologie quotient sur X/G coïncide avec la topologie induite par la distance δ du chapitre précédent. Nous sommes donc bien en train de généraliser le concept. Vous vérifierez que le lemme 1.5.8 reste vrai avec ces définitions plus générales (avec rigoureusement la même démonstration).

Exemple 2.1.4. On reprend l'exemple de $\mathbf{C}^*$ qui agit sur $X = \mathbf{C}$. Ici $X/G = \{\overline{0}, \overline{1}\}$ (les orbites de 0 et de 1 respectivement). Les parties fermées de X/G, muni de la topologie quotient, sont

$$\emptyset\,,\ X/G\,,\ \{\overline{0}\}\,,$$

alors que $\{\overline{1}\}$ est ouvert (!), et son adhérence est X/G en entier (!).

Exemple 2.1.5. Reprenons maintenant $X = \mathbf{R}^2$ avec l'action de $G = \mathbf{Z}^2$, de sorte que X/G est le tore. Si $Y = [0,1]^2$ (l'adhérence de notre domaine fondamental favori, cf l'exemple 1.5.13), alors $p(Y) = X/G$. Soit $\sim$ la relation d'équivalence sur Y induite par l'action de G sur X, ou ce qui revient au même, $x \sim y \iff p(x) = p(y)$. C'est tout simplement la relation qui apparaît sur nos petits dessins du tore : les points sur les côtés opposés sont identifiés.

L'application $p\colon Y \longrightarrow X/G$ induit $\overline{p}\colon Y/\!\sim\ \longrightarrow X/G$, qui est une bijection (c'est « presque »l'identité !). Par la propriété fondamentale de la topologie quotient, ou en d'autres termes le lemme 2.1.2, on voit que $\overline{p}$ est continue. Or Y est compact, donc $Y/\!\sim$ aussi, et X/G est séparé, donc $\overline{p}$ est un homéomorphisme.

Nous avons donc établi que le tore pouvait être défini, comme espace topologique, comme le carré Y sur lequel on met la relation d'équivalence $\sim$, ou plus brièvement, sur lequel on identifie les côtés opposés.

Remarques 2.1.6.

1. Supposons que nous ayons pris $Y_0 = [0,1[\, \times\, [0,1[$ à la place de Y. Cette fois-ci l'application $q_0\colon Y_0 \longrightarrow X/G$ est elle-même une bijection, de même que $\overline{q}_0\colon Y_0/\!\sim\ \longrightarrow X/G$ (en fait il n'y a pas vraiment de différence entre Y_0 et $Y_0/\!\sim$ dans ce cas !). Puisque Y_0 n'est pas compact, mais X/G si, on en déduit que q_0 n'est pas un homéomorphisme. De même $\overline{q}_0$ n'est pas un homéomorphisme. Voilà qui montre que ce qui se passe dans l'exemple ci-dessus n'est pas anodin : il faut choisir Y avec soin.
2. Et voici une autre complication. Gardons les notations de l'exemple, donc $Y = [0,1]^2$ et $q\colon Y \longrightarrow Y/\!\sim$. Soit $U = B((0,0), \frac{1}{2})$ la boule de centre $\frac{1}{2}$ centrée en $(0,0)$ dans Y : visuellement, elle ressemble à un quart de disque. Est-ce que $q(U)$ est ouvert dans $Y/\!\sim$? Il faut regarder $q^{-1}(q(U))$, qui est composé de U et de six segments, aux trois autres coins du carré. Ceci n'est pas un ouvert dans Y. On s'aperçoit donc qu'une application de passage au quotient, telle que q, n'est pas forcément une application ouverte. Comparer avec le lemme 1.5.6.

De la même manière, vous montrerez que la bouteille de Klein, le ruban de Moebius, peuvent être définis à partir d'identifications sur le bord d'un polygône. Voyons maintenant un espace topologique d'importance capitale en géométrie, appelé *la surface de genre* g et noté Σ_g, que nous allons définir à l'aide de la topologie quotient. Il existe bien une définition de la forme $\Sigma_g := X/G$, mais c'est une assez longue histoire, et le groupe G n'est pas évident du tout à décrire (ce point de vue est développé dans les cours de « géométrie hyperbolique »). La définition que nous allons donner, au contraire, est très visuelle : il s'agit de collages simples. Le petit prix à payer en abstraction pour comprendre ce qu'est la topologie quotient est ici bien amorti.

On va être un tout petit peu informels, pour éviter une escalade de notations qui ne serviraient qu'une seule fois (le but est juste de construire de nouveaux exemples d'espaces intéressants, mais la suite du livre ne dépend pas sérieusement de ceux-ci, donc nous pouvons prendre le risque de l'imprécision). Nous avons déjà l'habitude d'indiquer les identifications sur un dessin à l'aide d'étiquettes et de flèches. Changeons de « codage », avec maintenant la convention suivante : sur le bord d'un polygône, on va placer des lettres le long des segments, et deux étiquettes de la forme a et a^{-1} indiquent que les segments correspondants doivent être identifiés comme si, avec la convention précédente, on avait mis une flèche « dans le sens trigonométrique » et l'autre « dans le sens anti-trigonométrique ». Par exemple, sur le bord d'un carré, on met sur les 4 côtés les étiquettes a, b, a^{-1}, b^{-1} dans cet ordre (peu importe dans quel sens on tourne). Alors l'espace désigné est le tore (si vous comprenez cet exemple, alors vous avez compris la nouvelle convention). Avec a, b, a^{-1}, b on obtient la bouteille de Klein. Plus difficile : avec a, b, a, b on obtient $\mathbf{R}P^2$. De la sorte, on peut désigner un espace topologique avec un seul « mot » : $aba^{-1}b^{-1}$ pour le tore, $aba^{-1}b$ pour la bouteille de Klein, etc.

Définition 2.1.7. Soit $g \geq 1$ un entier, appelé le « genre » dans la suite. Soient $a_1, a_2, \dots, a_g$ et $b_1, b_2, \dots, b_g$ des symboles. Si x et y sont des symboles, on note

$$[x, y] = xyx^{-1}y^{-1} ,$$

un mot sur l'aphabet $\{x, x^{-1}, y, y^{-1}\}$.

Soit alors K un polygône régulier à $4g$ côtés, par exemple l'enveloppe convexe dans $\mathbf{C}$ de $1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{4g-1}$ où $\omega = \exp(2i\pi/4g)$. Sur le bord de K, on place le mot de longueur $4g$ suivant dans le sens des aiguilles d'une montre :

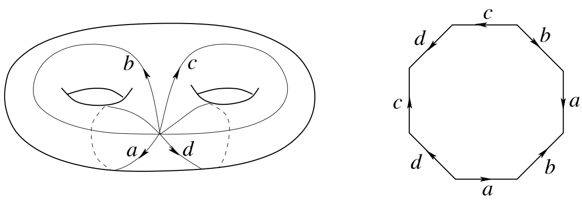
$$[a_1, b_1][a_2, b_2] \cdots [a_g, b_g] .$$

Si $\sim$ est la relation d'équivalence ainsi définie sur K, alors on pose

$$\Sigma_g := K/\sim ,$$

et on l'appelle la *surface de genre g*.

Voici une illustration pour $g = 2$:



2.2. Applications de quotient

On va démontrer quelques propriétés de la topologie quotient qui étaient évidentes dans le cas particulier étudié au chapitre précédent, et qui maintenant nécessitent quelques arguments. Le vocabulaire suivant va être très utile :

Définition 2.2.1. Soit $f\colon X \longrightarrow Y$ continue. On dit que f est une *application de quotient* lorsqu'elle est surjective et que, pour tout $U \subset Y$ tel que $f^{-1}(U)$ est ouvert dans X, l'ensemble U est lui-même ouvert dans Y.

(On dit parfois « application-quotient », « quotient », ou même « identification », au lieu de « application de quotient ».)

Notez bien que, par continuité, si U est ouvert, alors $f^{-1}(U)$ est ouvert ; ici il s'agit bien de la réciproque ! Ce concept nous fournit juste du vocabulaire nouveau pour parler de choses que l'on a déjà rencontrées, puisque l'on a en fait :

Lemme 2.2.2. *Soit $f\colon X \longrightarrow Y$ continue et surjective. Soit $\sim$ la relation sur X définie par $x \sim y \iff f(x) = f(y)$. On a une bijection continue $\overline{f}\colon X/\!\sim\ \longrightarrow Y$ induite par f. Il y a alors équivalence entre :*

1. *f est une application de quotient,*
2. *$\overline{f}$ est un homéomorphisme (et pas seulement une bijection continue).*

Démonstration. Exercice. □

Ce lemme nous montre en particulier que, si $\sim$ est une relation d'équivalence sur X, alors l'application naturelle $p\colon X \longrightarrow X/\!\sim$ est une application de quotient, puisque $\overline{p}$ est l'identité (heureusement, sinon l'expression serait franchement mal choisie) ; et en général, le lemme nous dit intuitivement que toute application de quotient est « proche » d'une application de la forme $X \longrightarrow X/\!\sim$.

Voici tout de suite de quoi se convaincre que les applications de quotient sont faciles à trouver :

Corollaire 2.2.3. *Soit $f\colon X \longrightarrow Y$ une application continue et surjective. Si X est compact et si Y est séparé, alors f est une application de quotient.*

Démonstration. L'application $\overline{f}\colon X/\!\sim\ \longrightarrow Y$ est une bijection continue entre un compact et un séparé, c'est donc un homéomorphisme. On note que $X/\!\sim$ est l'image du compact X par l'application continue canonique, donc c'est bel et bien un compact. □

Par exemple, à la fin de l'exemple 2.1.5, on pourrait invoquer ce corollaire pour simplifier la discussion. Voici une autre façon de trouver des applications de quotient :

Lemme 2.2.4. *Soit $p\colon X \longrightarrow Y$ une application de quotient, et soit $A \subset X$ une partie* saturée *de X, c'est-à-dire que si $a \in A$ et $p(a) = p(a')$ pour $a' \in X$, alors $a' \in A$. Soit enfin $q\colon A \longrightarrow p(A)$ la restriction de p.*

Dans cette situation, si on suppose que A est ouverte, ou que A est fermée, alors q est elle-même une application de quotient.

À comparer avec le (3) de la remarque 1.5.7.

Démonstration. Supposons d'abord que A est ouvert dans X. On se donne $U \subset p(A)$ tel que $q^{-1}(U)$ est ouvert dans A, et on doit montrer que U est ouvert dans $p(A)$. Or, l'hypothèse de saturation nous dit que $q^{-1}(U) = p^{-1}(U)$. Par ailleurs, puisque A est ouvert, et que $p^{-1}(U)$ est ouvert dans A, on en déduit que ce même ensemble $p^{-1}(U)$ est ouvert dans X. L'application p étant un quotient, on en déduit que U est ouvert dans Y. En particulier, U est ouvert dans $p(A)$.

Pour le cas où A est supposé fermé plutôt qu'ouvert, il suffit de se faire la remarque évidente suivante : une application continue f est un quotient si et seulement si pour toute partie F telle que $f^{-1}(F)$ est fermé, alors F est fermé. (Bref, on peut remplacer « ouvert » par « fermé » dans la définition d'une applicaton de quotient.) Ayant repéré ceci, on remplace « ouvert » par « fermé » dans le paragraphe précédent. □

On va maintenant montrer, et c'est beaucoup plus difficile :

Proposition 2.2.5. *Soit $f\colon X \longrightarrow Y$ une application de quotient. Alors l'application*

$$f \times id\colon X \times [0,1] \longrightarrow Y \times [0,1]\,,$$

définie par $f \times id(x,t) = (f(x), t)$, est également une application de quotient.

Après la démonstration, nous dirons un mot sur le rôle apparemment très particulier de l'intervalle $[0,1]$.

Démonstration. Écrivons $g = f \times id$. On prend un $U \subset Y \times [0,1]$ tel que $g^{-1}(U)$ est ouvert, et on se donne $(y_0, t_0) \in U$. Il s'agit de montrer que U contient un voisinage de (y_0, t_0).

En prenant un premier $x_0 \in f^{-1}(y_0)$, on constate que $g^{-1}(U)$, qui est ouvert et contient (x_0, t_0), contient un produit $V \times [a, b]$ où V est un voisinage de x_0 et $a < t_0 < b$; donc U contient au moins $\{y_0\} \times [a, b]$. Fixons donc ce a et ce b, et posons

$$\Omega = \{y \in Y \mid \{y\} \times [a, b] \subset U\}\,.$$

Ainsi $\Omega \times [a, b] \subset U$, donc si on parvient à montrer que Ω est ouvert, alors on aura bien un voisinage de (y_0, t_0), à savoir $\Omega \times]a, b[$, contenu dans U.

Puisque f est une application de quotient, il s'agit finalement de montrer que $f^{-1}(\Omega)$ est ouvert. Prenons $x \in f^{-1}(\Omega)$, de sorte que $\{x\} \times [a, b] \subset g^{-1}(U)$. Pour chaque $t \in [a, b]$ (le point x étant fixé), en utilisant de nouveau le fait que $g^{-1}(U)$ est ouvert, et puisque $(x, t) \in g^{-1}(U)$, on trouve des voisinages V_t et W_t de x et t respectivement, tels que $V_t \times W_t \subset g^{-1}(U)$. Les ouverts W_t recouvrent $[a, b]$, qui est compact ; donc on peut le recouvrir par un nombre fini de ces ouverts, disons $W_{t_1}, \ldots, W_{t_n}$. On pose alors $V_x = \bigcap_i V_{t_i}$, un ouvert de X qui contient x, de sorte que $V_x \times [a, b] \subset g^{-1}(U)$.

On a établi que $V_x \subset f^{-1}(\Omega)$, donc que $f^{-1}(\Omega)$ est ouvert, ce qui achève la démonstration. $\square$

On peut se demander ce que l'intervalle $[0, 1]$ possède de particulier, pour que cette proposition fonctionne. La réponse est que, comme vous le montrerez à titre d'exercice, on peut remplacer $[0, 1]$ par n'importe quel espace topologique Z *localement compact*, c'est-à-dire que tout $z \in Z$ possède un voisinage V tel que $\overline{V}$ est compact. Par contre, cette hypothèse est nécessaire : il y a vraiment des contre-exemples dans le cas général. Ils sont très difficiles à donner, et pas dans l'esprit du cours, donc on ne va pas s'y attarder.

Voici comment on va se servir de cette proposition :

Corollaire 2.2.6 (passage au quotient des homotopies). *Soit X et Y des espaces topologiques, et soit*

$$F\colon X \times [0, 1] \longrightarrow Y$$

une homotopie. On suppose qu'on a une relation d'équivalence $\sim$ sur X, et que F lui est compatible, dans le sens où $F(x, t) = F(x', t)$ à chaque fois que $x \sim x'$ (pour $t \in [0, 1]$).

Alors il existe une unique homotopie

$$H\colon X/\!\sim\, \times [0, 1] \longrightarrow Y\,,$$

que l'on dira induite par F, qui vérifie $H(p(x), t) = F(x, t)$.

Démonstration. C'est bien sûr la continuité de H qu'il faut établir. Définissons une relation d'équivalence $\equiv$ sur $X \times [0,1]$ par $(x,t) \equiv (x',t') \iff t = t'$ et $x \sim x'$. La condition sur F garantit l'existence de

$$\overline{F}\colon (X \times [0,1])/{\equiv} \longrightarrow Y$$

telle que $\overline{F}(q(x,t)) = F(x,t)$, où $q\colon X \times [0,1] \longrightarrow (X \times [0,1])/{\equiv}$ est l'application naturelle, et $\overline{F}$ est continue.

Maintenant, soit $p\colon X \longrightarrow X/{\sim}$ l'application de quotient, et posons

$$f = p \times id\colon X \times [0,1] \longrightarrow X/{\sim} \times [0,1]\,.$$

Par la proposition, f est une application de quotient. Ceci signifie exactement que l'application induite

$$\overline{f}\colon (X \times [0,1])/{\equiv} \longrightarrow X/{\sim} \times [0,1]$$

est un homéomorphisme.

Finalement, on constate que $H = \overline{F} \circ \overline{f}^{-1}$, ce qui montre que H est continue. $\square$

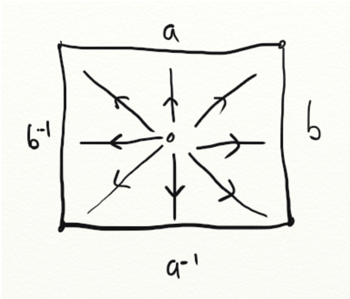
Exemple 2.2.7. On va montrer de nouveau que, si on enlève un point au tore, on obtient un espace qui se rétracte sur l'union de deux cercles tangents. Nous avons vu ça dans les exercices à la fin du chapitre précédent, mais il a fallu indiquer une homotopie compatible avec l'action de groupe, et nous avons dû nous contenter de dessins. La nouvelle version que voici est plus abstraite, mais finalement, en travaillant avec un carré au lieu du plan entier, on peut (si vraiment on y tient...) formaliser complètement l'argument.

Soit donc $C = [0,1]^2$ le carré et $\sim$ la relation d'équivalence habituelle, de sorte que $T = C/{\sim}$ est le tore que nous connaissons. On écrit $p\colon C \longrightarrow T$ pour l'application naturelle. Puis, on introduit l'ouvert $U = C - \{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})\}$ et son image $T' = p(U) = T - \{p(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})\}$, le tore auquel on a retiré un point. Puisque U est ouvert et saturé, la restriction $p\colon U \longrightarrow T'$ est une application de quotient (lemme 2.2.4) ; autrement dit, on a $T' = U/{\sim}$, sans ambiguïté sur la topologie utilisée.

Maintenant, soit K le bord du carré, c'est-à-dire $K = [0,1] \times \{0,1\} \cup \{0,1\} \times [0,1]$. On va définir une homotopie

$$F\colon U \times [0,1] \longrightarrow U$$

qui réalise une rétraction de U sur K. Le dessin suivant est très convaincant :



Admettons que, dans une crise de mauvaise foi, vous trouviez que le dessin est insuffisant et qu'il vous faut une formule. On fait appel à la proposition 1.2.1, qui nous donne un homéomorphisme $\varphi\colon B^2 \longrightarrow C$, qui induit par restriction un homéomorphisme $S^1 \longrightarrow K$. Par construction, on peut s'arranger pour que $\varphi(0) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, de sorte qu'on a aussi un homéomorphisme $U_0 = B^2 - \{0\} \longrightarrow U$. Maintenant on définit $F_0\colon U_0 \times [0,1] \longrightarrow U_0$ par la formule $F_0(x,t) = [(t + \|x\|(1-t))/\|x\|]\, x$, qui réalise une rétraction de U_0 sur S^1 ; ensuite on prend finalement $F(u,t) = \varphi(F_0(\varphi^{-1}(u),t))$.

Ceci étant fait, on constate que

$$p \circ F\colon U \times [0,1] \longrightarrow T'$$

vérifie les hypothèses du dernier corollaire. On en déduit qu'il existe

$$H\colon T' \times [0,1] \longrightarrow T'$$

qui est une rétraction de T' sur $p(K)$. Enfin, on vous laisse démontrer que $p(K)$ est constitué de deux cercles ayant un point en commun.

En pratique, ayant fait un exemple dans les moindres détails comme celui-ci, on se contente ensuite de faire des dessins. Mais il est important de réaliser pourquoi « ça marche ».

2.3. Écraser un sous-espace

Nous avons besoin d'un petit arsenal de méthodes pour montrer rapidement, par exemple à l'aide de petits dessins, que deux espaces ont le même type d'homotopie. Pour l'instant, on peut dessiner des rétractions, éventuellement en utilisant le corollaire de passage au quotient des homotopies. On va maintenant voir comment « écraser un sous-espace contractile ».

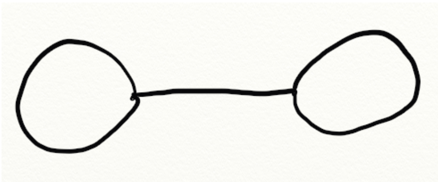
Voyons d'abord ce que « écraser un sous-espace » signifie.

Définition 2.3.1. Soit A est une partie non vide (en général fermée) de X. On obtient une partition de X en prenant l'union (disjointe) des singletons $\{x\}$ pour $x \in X - A$, et A lui-même. Ceci définit une relation d'équivalence sur X, disons $\sim$, et l'espace $X/\sim$ est noté X/A.

En termes plus imagés, X/A est obtenu à partir de X en identifiant tous les points de A. On dit aussi « en écrasant A ».

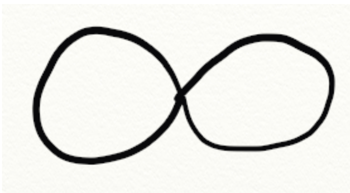
Le point de X/A sur lequel A s'est écrasé sera souvent noté $*$.

Exemple 2.3.2. Prenons pour X un espace en forme d'haltère :



Si on veut être plus formel, disons que X est le sous-espace de $\mathbf{R}^2$ formé par le segment $[-1, 1]$, le cercle de centre $(2, 0)$ et de rayon 1, et le cercle de centre $(-2, 0)$ et de rayon 1.

Prenons alors $A = [-1, 1]$. L'espace quotient X/A ressemble alors à un 8, c'est-à-dire à deux cercles tangents :



Voici un outil fondamental pour « repérer » des homotopies.

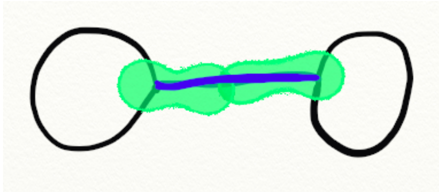
Théorème 2.3.3 (écrasement d'une partie contractile). *Soit X un espace métrique (!), et soit $A \subset X$ une partie fermée qui est contractile.*

On suppose que la condition technique suivante est satisfaite : il existe un ouvert U avec $A \subset U \subset X$ et une rétraction de U sur A.

Alors l'application quotient $X \longrightarrow X/A$ est une équivalence d'homotopie.

La démonstration est assez compliquée, mais le théorème est facile à utiliser.

Exemple 2.3.4. Revenons à l'exemple précédent. Nous avons A et X, et prenons pour U la partie de X contenue dans la zone en vert ci-dessous (on a aussi mis A en bleu) :



Donc le théorème s'applique. On en déduit que « l'haltère » et « le 8 » ont le même type d'homotopie. Mais l'un n'est pas un rétract de l'autre ! Sur cet exemple on peut assez bien imaginer une application $X/A \longrightarrow X$, qui soit une inverse « à homotopie près » de $X \longrightarrow X/A$. Mais il est compliqué de vraiment montrer que les homotopies existent – les dessins ne sont plus si convaincants que ça.

Passons à la démonstration du théorème, qui est un peu longue et va conclure ce chapitre technique.

On commence par :

Lemme 2.3.5. *On suppose qu'on a $A \subset U \subset X$ avec X métrique, A fermé et U ouvert. Alors il existe un fermé B avec $A \subset B \subset U$ et une fonction continue $f : X \longrightarrow [0,1]$ telle que $f^{-1}(0) = A$ et $f(X - B) = \{1\}$.*

Démonstration. Faisons un rappel de cours sur les espaces métriques. La partie A étant fermée dans X, posons

$$d(x, A) = \inf_{a \in A} d(x, a)$$

pour $x \in X$, où d est la fonction distance. Alors on montre que $x \mapsto d(x, A)$ est continue, et $x \in A \iff d(x, A) = 0$.

Ceci étant, posons

$$B = \{x \in X \mid d(x, A) \leq d(x, X - U)\},$$

qui est bien un fermé compris entre A et U, et

$$g(x) = \frac{2d(x, A)}{d(x, A) + d(x, X - U)},$$

qui est une fonction continue $X \longrightarrow \mathbf{R}$. Pour $x \notin B$, par définition on a $g(x) > 1$. On pose alors

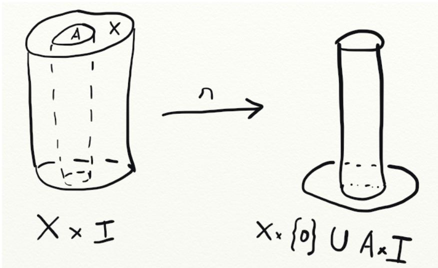
$$f(x) = \min(1, g(x)),$$

et on vérifie que f a toutes les propriétés souhaitées. $\square$

Lemme 2.3.6. *On garde les mêmes notations, et on pose $I = [0, 1]$. Alors il existe une application continue*

$$r \colon X \times I \longrightarrow X \times \{0\} \cup A \times I$$

qui est l'identité sur $X \times \{0\} \cup A \times I$.



On n'affirme pas ici que r est une rétraction, c'est-à-dire qu'on ne sait pas si r est homotope à l'identité, mais c'est tout de même l'intuition que l'on a.

Démonstration. Supposons que l'on ait construit une application continue

$$\varphi \colon U \times I \longrightarrow X \times \{0\} \cup A \times I$$

telle que $\varphi(u, 0) = (u, 0)$ pour $u \in U$ et $\varphi(a, t) = (a, t)$ pour $a \in A$ et $t \in I$. Posons alors $r(u, t) = \varphi(u, t(1 - f(u)))$ pour $u \in U$, $t \in I$ (ici f est donnée par le lemme), et $r(x, t) = (x, 0)$ pour $x \in X - B$. Ces deux définitions coïncident pour $x \in U - B$, et l'application r ainsi obtenue sur $X \times I$ est continue, puisque ses restrictions aux deux ouverts $U \times I$ et $(X - B) \times I$ sont continues. On a bien construit r comme dans l'énoncé du lemme.

Il suffit donc de construire φ, et pour ça on va utiliser le fait que U se rétracte sur A, donc qu'il existe $H \colon U \times I \longrightarrow U$ avec $H(u, 0) = u$, $H(u, 1) \in A$, et $H(a, t) = a$ pour $a \in A$ et $t \in I$. On pose alors

$$\varphi(u, t) = \begin{cases} (H(u, \frac{t}{f(u)}), 0) & \text{pour } f(u) > t\,, \\ (H(u, 1), t - f(u)) & \text{pour } f(u) \leq t\,. \end{cases}$$

La dernière chose à faire est donc de montrer que φ est continue, le reste étant clair. Si (u_0, t_0) appartient à l'ouvert

$$\{(u, t) \mid f(u) > t\}$$

alors la continuité en (u_0, t_0) est évidente (« on n'utilise que la première formule »), et de même sur l'ouvert

$$\{(u,t) \mid f(u) < t\}\,,$$

avec « la deuxième formule ». Si $f(u_0) = t_0 > 0$, alors il existe un voisinage de (u_0, t_0) sur lequel $t/f(u)$ reste proche de 1 et $t - f(u)$ reste proche de 0, donc la continuité de pose pas de problème (détails laissés en exercice).

C'est un peu plus difficile dans le dernier cas, si $f(u_0) = t_0 = 0$, ce qui entraîne que $u_0 \in A$. On va noter $a = u_0$. Soit W un voisinage de a. Pour chaque $t \in I$, on a $H(a,t) = t$, donc il existe des voisinages V_t et I_t de a et t respectivement tels que $H(V_t \times I_t) \subset W$ (la fonction H étant continue). Par compacité de I, on peut le recouvrir par un nombre fini d'ouverts de la forme $I_{t_1}, \ldots, I_{t_n}$. Alors $V = \cap_i V_{t_i}$ est ouvert, et $H(V \times I) \subset W$.

Pour finir, pour tout $\varepsilon > 0$ on observe que $\varphi(V \times [0, \varepsilon[) \subset W \times [0, \varepsilon[$, ce qui achève bien de montrer la continuité en $(a, 0)$. $\square$

On peut enfin, après ces préliminaires, attaquer la démonstration du théorème proprement dite. Jusqu'à présent, nous n'avons pas utilisé le fait que A est contractile, et c'est évidemment crucial, donc écrivons qu'il existe

$$F\colon A \times I \longrightarrow A$$

avec $F(a,0) = a$ et $F(a,1) =$ une constante, disons $f(a,1) = a_0$, pour tous les $a \in A$. Par le lemme du recollement (cf les exercices), on en déduit l'existence d'une application continue

$$G\colon X \times \{0\} \cup A \times I \longrightarrow X$$

avec $G(x,0) = (x,0)$ pour tout $x \in X$, et $G(a,t) = F(a,t)$ pour $(a,t) \in A \times I$, donc $G(a,1) = a_0$ en particulier. Considérons alors

$$H = G \circ r\colon X \times I \longrightarrow X\,,$$

où r est donnée par le dernier lemme. On a $H(x,0) = x$; si on note $s(x) = H(x,1)$, alors $s\colon X \longrightarrow X$ est constante sur A, et est homotope à l'identité de X. Si $p\colon X \longrightarrow X/A$ est l'application quotient, on peut donc factoriser $s = \overline{s} \circ p$, où $\overline{s}\colon X/A \longrightarrow X$ est continue. C'est $\overline{s}$ qui va être l'inverse de p à homotopie près.

En effet, on a $\overline{s} \circ p = s$ qui est homotope à l'identité, et il faut considérer simplement la composition dans l'autre sens, à savoir $p \circ \overline{s}\colon X/A \longrightarrow X/A$. Il est utile d'invoquer tout de suite le lemme « de passage au quotient des homotopies », qui nous fournit un homéomorphisme

$$\theta\colon\ (X \times I)\,/\equiv\longrightarrow (X/A) \times I\,,$$

pour une certaine relation d'équivalence $\equiv$. Maintenant, commençons par regarder

$$H' = p \circ H\colon\, X \times I \longrightarrow X/A\,.$$

Alors $H'(a,t) = *$ (le point-base de X/A) pour tout $a \in A$. En passant au quotient on obtient une application continue

$$H''\colon\ (X \times I)\,/\equiv\longrightarrow X/A\,.$$

Et enfin, on utilise $H'' \circ \theta^{-1}\colon\, (X/A) \times I \longrightarrow X/A$. Une rapide inspection confirme que ceci est une homotopie entre l'identité de X/A et la composition $p \circ \overline{s}$.

2.4. Exercices

Exercice 15.

1. Utiliser la « projection stéréographique » (voir l'exercice 9) pour montrer le fait suivant. Soit $N = (0, 0, \ldots, 1)$ le « pôle nord » dans $S^n \subset \mathbf{R}^{n+1}$; il existe un homéomorphisme

$$f\colon \mathbf{R}^n \longrightarrow S^n - \{N\}$$

avec la propriété que $f(x)$ tend vers N à mesure que $\|x\|$ tend vers $+\infty$.

2. En déduire que B^n/S^{n-1} est homéomorphe à S^n.

On s'en sert constamment dans la deuxième partie de ce livre.

Exercice 16. Reprendre les lettres de l'alphabet comme dans l'exercice 5. À partir de chaque lettre, écraser successivement plusieurs parties contractiles jusqu'à obtenir un espace homéomorphe à l'union de n cercles tous tangents en un même point (on parle souvent de « bouquet de cercles »).

Dans la suite, nous montrerons que l'entier n détermine complètement le type d'homotopie d'un tel bouquet, et donc nous aurons complètement classifié les lettres de l'alphabet à homotopie près.

Question ouverte : imaginer un énoncé plus général, concernant les espaces topologiques qu'on peut décrire comme des « graphes » (on vous laisse aussi imaginer une définition), et leur type d'homotopie ; démontrer cet énoncé par récurrence sur le nombre de sommets.

Chapitre 3

Le groupe fondamental

Nous attaquons les choses sérieuses dans ce chapitre. Nous définissons enfin le « groupe fondamental » $\pi_1(X, x_0)$ associé à l'espace topologique X et au point $x_0 \in X$, et nous montrons qu'il ne dépend que du type d'homotopie de X. Ainsi, pour montrer que deux espaces n'ont pas le même type d'homotopie, il suffit de calculer les groupes associés et de montrer qu'ils ne sont pas isomorphes.

Nous prenons le temps de traiter le cas $X = \mathbf{C} - \{0\}$ en détail, et par des moyens élémentaires (on retrouvera le résultat par les méthodes puissantes du chapitre suivant). C'est un exemple fondamental, et la plupart des autres exemples d'espace ayant un groupe fondamental non-trivial seront dérivés de celui-ci. Peut-être devrions nous préciser tout de suite qu'il est très difficile, en général, de calculer $\pi_1(X, x_0)$. Heureusement, avec quelques cas particuliers seulement, on obtient des applications frappantes, tel le théorème du point fixe de Brouwer, que nous montrons ici.

3.1. Premières définitions

Définition 3.1.1. Soit X un espace topologique, et soit $x_0 \in X$. Le *groupe fondamental de X basé en x_0*, ou parfois *groupe de Poincaré de X*, est

$$\pi_1(X, x_0) := \big[(I, \{0,1\}), (X, x_0)\big]\,,$$

où $I = [0, 1]$. Soyons beaucoup plus explicites. On considère les *lacets en x_0*, c'est-à-dire les fonctions continues $c\colon I \longrightarrow X$ telles que $c(0) = c(1) = x_0$, et on les prend modulo la relation d'homotopie rel $\{0, 1\}$. Pour continuer à être explicites, deux lacets c_1, c_2 représentent le même élément de $\pi_1(X, x_0)$ lorsqu'il existe $F\colon I^2 \longrightarrow X$, continue, telle que $F(s,0) = c_1(s)$, $F(s,1) = c_2(s)$, et $F(0,t) = F(1,t) = x_0$, pour tous les $s, t \in I$.

On écrira $[c]$ pour la classe de c (typiquement, la lettre γ désignera un élément du groupe fondamental).

Il n'est pas du tout évident que le « groupe fondamental » soit effectivement un groupe ! C'est bien sûr le cas, mais nous allons attendre un peu avant de le montrer. Commençons par un exemple tout bête.

Exemple 3.1.2. L'ensemble $\pi_1(\mathbf{R}^n, 0)$, pour $n \geq 0$, est trivial, c'est-à-dire qu'il ne contient qu'un seul élément, à savoir la classe du lacet constant en 0. Pour montrer ceci, il faut prendre un lacet quelconque c et construire une homotopie rel $\{0, 1\}$ avec le lacet constant. Sur le dessin, on y croit :

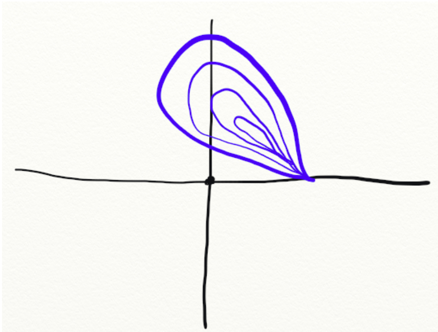
Pour obtenir une formule maintenant, on pose $F(s,t) = tc(s)$. C'est bien une homotopie entre le lacet constant et c.

À partir de maintenant, le terme de *lacet* signifie toujours une application continue $c\colon I \longrightarrow X$ telle que $c(0) = c(1)$, et le terme de *chemin* désigne une application continue $c\colon I \longrightarrow X$ quelconque.

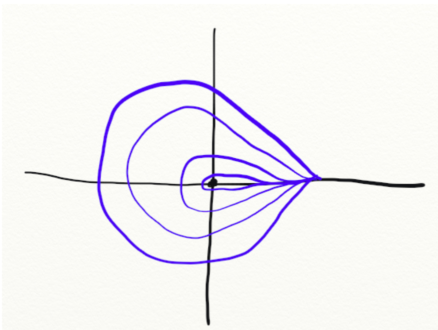
3.2. Le plan épointé

On va décrire l'ensemble $\pi_1(\mathbf{C}^*, 1)$, où $\mathbf{C}^* = \mathbf{C} - \{0\}$ est le « plan épointé ». Cet exemple est si important que nous le donnons tout de suite, avant même d'avoir développé les propriétés du groupe fondamental. On est amenés à utiliser des méthodes qui sont parfois proches du bidouillage : on va utiliser des dérivées, des intégrales, et même un peu de trigonométrie, qui sont des outils mathématiques tout-à-fait respectables évidemment, sauf qu'il serait inexact de penser qu'ils sont intimement liés au groupe fondamental de $\mathbf{C}^*$. Dans le chapitre suivant, nous verrons qu'on peut en réalité généraliser les méthodes entr'aperçues ici, et les intégrer dans une théorie plus conceptuelle – mais c'est long, et pour ne pas attendre, et nous employons quelques astuces pour faire des raccourcis.

Intuitivement, commençons par dessiner un lacet qui « ne fait pas le tour de l'origine » :



Il semble possible de trouver une homotopie avec le lacet constant – on dit parfois que ce lacet est « trivial ». Maintenant, imaginons un lacet qui tourne bel et bien autour de l'origine :



Si ce lacet est un élastique prêt à se contracter, et si on imagine qu'il y a un clou qui dépasse du plan, planté en l'origine, alors l'élastique va être arrêté par le clou. Cette fois-ci, il semble impossible de trouver une homotopie avec le lacet constant.

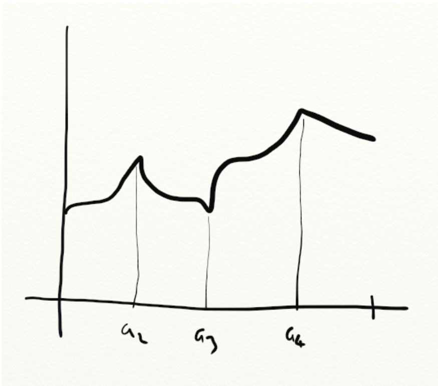
Tout le travail, dans cette partie, va consister à rendre cette idée rigoureuse. On va réussir à associer à chaque lacet un entier n, qui est intuitivement « le nombre de fois que le lacet tourne autour de 0 » (nombre qui est négatif « si on tourne dans le sens des aiguilles d'une montre »).

Lemme 3.2.1 (le relèvement C^1). *Soit $c\colon I \longrightarrow \mathbf{C}^*$ un lacet basé en 1, qui est C^1 par morceaux. Alors il existe un unique chemin $\widetilde{c}\colon I \longrightarrow \mathbf{C}$, qui est C^1 par morceaux, tel que $\widetilde{c}(0) = 0$, et*

$$c(t) = \exp(\widetilde{c}(t))$$

pour $t \in I$.

L'hypothèse « C^1 par morceaux », pour une application $f : I \longrightarrow \mathbf{C}$, signifie que f est continue (puisque dans notre cours, tout est continu), et qu'il existe une subdivision $a_0 = 0 < a_1 < \cdots < a_{k-1} < a_k = 1$ telle que f est continument dérivable (= de classe C^1) sur chaque $[a_i, a_{i+1}]$. Les parties réelles et imaginaires de f ressemblent en gros à ça :



(Un lacet que l'on dessine rapidement est toujours C^1 par morceaux.) Cette hypothèse est en fait farfelue, le résultat est vrai sans hypothèse du tout (nous le montrerons au chapitre suivant), et on va voir rapidement que les dérivées n'ont pas de rôle réel. Mais ça nous permet de montrer le lemme en quelques lignes, donc ça suffira pour l'instant :

Démonstration. Dans la démonstration, on va écrire φ au lieu de $\widetilde{c}$ (car on va utiliser des dérivées, et $\widetilde{c}'$ est désagréable à lire).

Pour un chemin $\varphi\colon I \longrightarrow \mathbf{C}$ qui est C^1 par morceaux, la condition $c(t) = \exp(\varphi(t))$ entraîne $c'(t) = \varphi'(t)\exp(\varphi(t)) = \varphi'(t)c(t)$ sauf éventuellement pour un nombre fini de valeurs de t où φ n'est pas dérivable ; donc φ est une primitive de c'/c, par morceaux. Ainsi φ est déterminée à une constante près sur les intervalles d'une subdivision, et il est facile de voir, φ étant continue, qu'elle est entièrement déterminée par la valeur $\varphi(0)$. On a donc l'unicité.

Pour l'existence, il suffit de poser

$$\varphi(t) = \int_0^t \frac{c'(s)}{c(s)} ds$$

(une intégrale à valeurs complexes, tout de même). Alors φ est C^1 par morceaux, $\varphi(0) = 0$, et $\varphi'(t) = c'(t)/c(t)$ (car c'/c est continue par morceaux), sauf pour un nombre fini de valeurs de t. La dérivée de $t \mapsto c(t)\exp(-\varphi(t))$ est alors nulle (sauf…), ce qui entraîne que $t \mapsto c(t)\exp(-\varphi(t))$ est constante sur les intervalles d'une subdivision. Par continuité, on en déduit qu'elle est en fait constante, d'où $c(t)\exp(-\varphi(t)) = c(0)\exp(0) = 1$, et $c(t) = \exp(\varphi(t))$. □

Le chemin $\widetilde{c}$ associé à c n'est en général pas un lacet. En fait, puisque $\exp(\widetilde{c}(1)) = c(1) = 1$, on a $\widetilde{c}(1) = 2ni\pi$ pour un entier $n \in \mathbf{Z}$. On pose alors

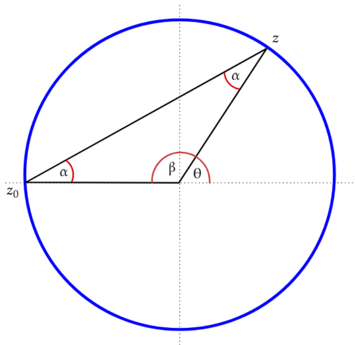
$$ind(c) = \frac{\widetilde{c}(1)}{2i\pi},$$

et on l'appelle *l'indice* de c, ce qui n'a de sens pour l'instant que pour un lacet c qui est C^1 par morceaux.

Exemple 3.2.2. Essayons de voir que l'indice d'un chemin qui « ne tourne pas autour de l'origine » est 0, comme on l'attend. Pour formaliser ça, on va travailler avec $U = \mathbf{C} - \mathbf{R}^{\leq 0}$, le plan moins une demi-droite ; prenons un lacet c à valeurs dans U et montrons que son indice est 0. La raison fondamentale est que sur U, on a un « logarithme », c'est-à-dire une fonction $\ell \colon U \longrightarrow \mathbf{C}$ qui est *continue* (et même un peu mieux) telle que $\exp(\ell(x)) = x$ (et vérifiant $\ell(1) = 0$). En effet, admettons pour un instant l'existence de ℓ, et posons alors $\widetilde{c}(t) = \ell(c(t))$. On a bien $\exp(\widetilde{c}(t)) = c(t)$, et $\widetilde{c}(0) = 0$, et la formule pour ℓ montrera tout de suite que ce $\widetilde{c}$ est C^1 par morceaux : donc par unicité, on a bien ici le chemin donné par le lemme du relèvement C^1. Mais alors

$$ind(c) = \frac{\widetilde{c}(1)}{2i\pi} = \frac{\ell(c(1))}{2i\pi} = \frac{\ell(1)}{2i\pi} = 0\,.$$

Voyons donc comment définir ℓ. Considérons la figure suivante.



On a placé un point z de module 1, avec $z \neq -1$; prenons les notations $z = e^{i\theta} = x + iy$, avec disons $-\pi < \theta < \pi$. On cherche « une formule continue pour θ en fonction de x et y ». On s'aperçoit que $\tan(\alpha) = y/(x+1)$, mais également que $\alpha = \theta/2$, donc

$$\theta = 2 \arctan\left(\frac{y}{x+1}\right) .$$

On peut donc déjà définir ℓ_0 sur $S^1 - \{-1\}$ par

$$\ell_0(z) = 2i \arctan\left(\frac{Im(z)}{Re(z)+1}\right) ,$$

qui est visiblement continue. Sur U, on prend

$$\ell(z) = \ln(|z|) + \ell_0\left(\frac{z}{|z|}\right) .$$

On vous laisse vérifier que tout marche.

Remarque 3.2.3. Une autre propriété remarquable des indices est la suivante. Si c_1 et c_2 sont des lacets dans $\mathbf{C}^*$, on va noter $c_1 \cdot c_2$ le lacet $c_1 \cdot c_2(t) = c_1(t)c_2(t)$ (on peut faire ça car l'espace que l'on regarde, à savoir $\mathbf{C}^*$, est un groupe !). Si c_1 et c_2 sont tous les deux C^1 par morceaux, on peut écrire $c_i(t) = \exp(\widetilde{c}_i(t))$, donc $c_1(t)c_2(t) = \exp(\widetilde{c}_1(t) + \widetilde{c}_2(t))$; en d'autres termes,

$$\widetilde{c_1 \cdot c_2} = \widetilde{c}_1 + \widetilde{c}_2 .$$

(À droite on a une somme de chemins, ce qui a un sens car $\mathbf{C}$ est un groupe additif.) On en déduit tout de suite que $ind(c_1 \cdot c_2) = ind(c_1) + ind(c_2)$. À titre d'exercice, vous montrerez que $ind(c_1/c_2) = ind(c_1) - ind(c_2)$.

Pour pouvoir définir l'indice d'un lacet quelconque, on montre :

Lemme 3.2.4. *Soit c un lacet au point 1 dans $\mathbf{C}^*$. Alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que, si c_1 et c_2 sont des lacets C^1 par morceaux tels que $\|c - c_i\|_\infty < \varepsilon$ pour $i = 1, 2$, alors $ind(c_1) = ind(c_2)$.*

Ici on utilise la notation classique en analyse

$$\|f\|_\infty = \max_{t \in [0,1]} |f(t)| \,.$$

Démonstration. Soit $m = \min_{t\in[0,1]} |c(t)|$, alors $m > 0$ car $|c|$ atteint son minimum sur le compact $[0, 1]$. Prenons alors n'importe quel $\varepsilon > 0$ tel que $\varepsilon < m/3$, de sorte que $2\varepsilon < m - \varepsilon$. Écrivons alors

$$|c_1(t) - c_2(t)| \leq |c_1(t) - c(t)| + |c(t) - c_2(t)| \leq 2\varepsilon < m - \varepsilon \,,$$

si $\|c - c_i\|_\infty < \varepsilon$. Mais pour tout $t \in [0, 1]$, on a également

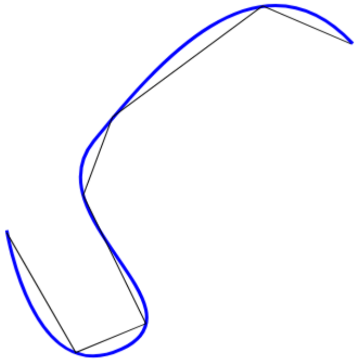
$$m - \varepsilon < |c_2(t)| \,,$$

et donc au total $|c_1(t) - c_2(t)| < |c_2(t)|$, ce qu'on ré-écrit

$$\left| \frac{c_1(t)}{c_2(t)} - 1 \right| < 1 \,.$$

Ainsi, le lacet c_1/c_2 est à valeurs dans le disque ouvert de centre 1 et de rayon 1, et en particulier, il est à valeurs dans U, l'ouvert décrit dans l'exemple ci-dessus. On en déduit que $ind(c_1/c_2) = 0$, et par la remarque, $ind(c_1) = ind(c_2)$. □

Grâce au lemme, nous pouvons définir l'indice d'un lacet c quelconque : il suffit de prendre l'indice de n'importe quel lacet c_1 qui soit C^1 par morceaux, et tel que $\|c - c_1\|_\infty$ est suffisamment petit (plus petit que le ε du lemme). Evidemment il faut vérifier qu'un tel c_1 existe, mais c'est évident : il suffit de prendre une approximation de c par une ligne brisée appropriée, comme sur le dessin suivant.



Lemme 3.2.5. *Si c_0 et c_1 sont deux lacets homotopes, alors $ind(c_0) = ind(c_1)$.*

Démonstration. Il faut commencer par montrer une version du lemme précédent en retirant « C^1 par morceaux », donc avec c, c_1 et c_2 des lacets arbitraires, et la « nouvelle » définition de l'indice qu'on vient de donner. C'est très simple, donc on vous le laisse en exercice.

Maintenant, soit $F\colon [0,1]^2 \longrightarrow \mathbf{C}^*$ une homotopie entre c_0 et c_1 ; notons c_t le lacet $c_t(s) = F(s,t)$ (ce qui est cohérent avec les notations c_0 et c_1). On utilise le théorème de Heine : puisque F est continue, elle est aussi *uniformément continue*. Ceci entraîne que, $\varepsilon > 0$ étant donné, il existe $\delta > 0$ tel que $|F(s,t) - F(s,t')| < \varepsilon$ si $|t - t'| < \delta$ (notez bien qu'on a pris s deux fois). En particulier, $\|c_t - c_{t'}\|_\infty \leq \varepsilon$ pour de telles valeurs de t et t'.

Si on fixe t, on se rend compte alors que $ind(c_t) = ind(c_{t'})$ pour tous les t' suffisamment proches de t. Ainsi, la fonction $[0,1] \longrightarrow \mathbf{Z}$ définie par $t \mapsto ind(c_t)$ est localement constante, et en particulier elle est continue. On en déduit (par connexité de $[0,1]$, en fait) qu'elle est constante, donc $ind(c_0) = ind(c_1)$. $\square$

Si $\gamma \in \pi_1(\mathbf{C}^*, 1)$, c'est-à-dire si γ est une classe d'homotopie de lacets, on peut donc parler de son indice, que l'on va noter $ind(\gamma)$. Par définition $ind(\gamma) = ind(c)$ pour tout c tel que $\gamma = [c]$.

Théorème 3.2.6. *La fonction*

$$\pi_1(\mathbf{C}^*, 1) \longrightarrow \mathbf{Z}$$

$$\gamma \mapsto ind(\gamma)$$

est une bijection.

Démonstration. Jusqu'ici, on a montré simplement que la fonction ind était bien définie. Il est très simple de voir qu'elle est surjective : pour $c(t) = \exp(2ni\pi t)$, donc avec $\widetilde{c}(t) = 2ni\pi t$, l'index est n.

Voyons donc l'injectivité. On prend γ_0 et γ_1 deux classes ayant le même indice, et on peut supposer $\gamma_i = [c_i]$ avec c_i qui est C^1 par morceaux, donc qui est de la forme $c_i(t) = \exp(\widetilde{c}_i(t))$ pour $i = 0, 1$. Ainsi, on a deux chemins $\widetilde{c}_0$ et $\widetilde{c}_1$ dans $\mathbf{C}$, qui vont chacun de 0 à $2ni\pi$, où $n = ind(c_0) = ind(c_1)$.

Mais dans $\mathbf{C} = \mathbf{R}^2$, les choses sont très faciles (comme dans l'exemple 3.1.2) : on trouve de suite une homotopie F rel $\{0, 1\}$ entre $\widetilde{c}_0$ et $\widetilde{c}_1$, par exemple

$$F(s,t) = (1-t)\widetilde{c}_0(s) + t\widetilde{c}_1(s)\,.$$

Si on prend alors $H(s,t) = \exp(F(s,t))$, on obtient une homotopie rel $\{0, 1\}$ entre c_0 et c_1. Donc $\gamma_0 = \gamma_1$. $\square$

Remarque 3.2.7. À l'occasion de la remarque 3.2.3, nous avons défini le produit $c_1 \cdot c_2$ de deux lacets. À titre d'exercice, vous définirez le produit $\gamma_1 \cdot \gamma_2$ de deux éléments du groupe fondamental ; vous montrerez que ceci fait de $\pi_1(\mathbf{C}^*, 1)$ un groupe, et qu'alors ind est un isomorphisme. Mais *attention*, tout ceci est un peu anecdotique : ça ne marche que parce que $\mathbf{C}^*$ est lui-même un groupe. Dans la suite, nous allons montrer que $\pi_1(X, x_0)$ est *toujours* un groupe, pour tout X, ce qui est bien plus profond. Pour $X = \mathbf{C}^*$, il s'agit bien de la même multiplication, mais ce n'est pas une chose triviale que de le montrer. Voyons tout ça.

3.3. Propriétés du groupe fondamental

Il est grand temps de donner la définition suivante.

Définition 3.3.1. Soient c_1 et c_2 deux chemins $[0, 1] \longrightarrow X$, ayant la propriété que $c_1(1) = c_2(0)$. On définit leur produit $c_1 \star c_2 \colon I \longrightarrow X$, aussi appelé la concaténation de c_1 et c_2, par :

$$(c_1 \star c_2)(t) := \begin{cases} c_1(2t) & \text{pour } t \leq \frac{1}{2}\,, \\ c_2(2t-1) & \text{pour } t \geq \frac{1}{2}\,. \end{cases}$$

Proposition 3.3.2. *Le produit $\star$ a les propriétés suivantes, où $\simeq$ désigne la relation d'homotopie rel $\{0, 1\}$:*

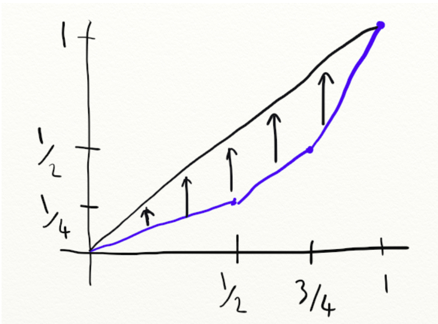
1. *Si $c_1 \simeq d_1$ et $c_2 \simeq d_2$, alors $c_1 \star c_2 \simeq d_1 \star d_2$.*
2. *Si e désigne le chemin constant au point $c(1)$, alors $c \star e \simeq c$. De même $e \star c \simeq c$ si e est le chemin constant au point $c(0)$.*
3. *$c_1 \star (c_2 \star c_3) \simeq (c_1 \star c_2) \star c_3$.*

4. *Si c est un chemin, écrivons c^{-1} pour le chemin $c^{-1}(t) = c(1-t)$. Alors $c \star c^{-1}$ est homotope au chemin constant en $c(0)$, et $c^{-1} \star c$ est homotope au chemin constant en $c(1)$.*

Démonstration. On laisse les (1) et (2) en exercice.

Voyons le (3), l'associativité. La différence entre $c_1 \star (c_2 \star c_3)$ et $(c_1 \star c_2) \star c_3$ est une reparamétrisation. Pour être plus précis, soit $\psi \colon I \longrightarrow I$ la fonction affine par morceaux telle que $\varphi(0) = 0$, $\psi(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$, $\psi(\frac{3}{4}) = \frac{1}{2}$ et $\psi(1) = 1$. Alors $c_1 \star (c_2 \star c_3) = (c_1 \star c_2) \star c_3 \circ \psi$.

Mais ψ est homotope à l'identité de I, par exemple en prenant $F(x,t) = (1-t)\psi(x) + tx$ comme sur le dessin suivant :



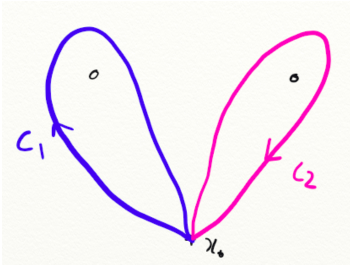
Alors $(c_1 \star c_2) \star c_3 \circ F$ est une homotopie entre $c_1 \star (c_2 \star c_3)$ et $(c_1 \star c_2) \star c_3$ qui est constante sur $\{0,1\} \times I$, comme on le souhaitait.

Montrons maintenant le (4), l'existence d'un inverse. Posons $F(t,s) = c(2st)$ pour $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$, et $F(s,t) = c(2s(1-t))$ pour $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$. Alors F est bien définie, continue par le lemme du recollement, et c'est une homotopie entre $c \star c^{-1}$ et le lacet constant. Pareil dans l'autre sens. $\square$

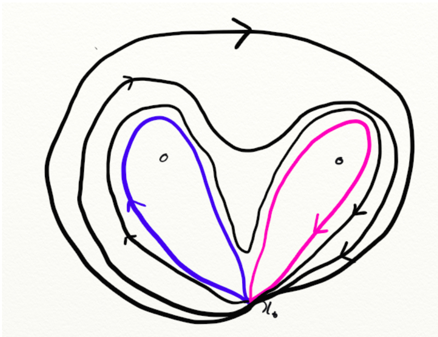
Corollaire 3.3.3. *Le produit défini ci-dessus donne une loi de groupe sur $\pi_1(X, x_0)$.*

Démonstration. Par le point (1), on peut définir $[c_1] \star [c_2] = [c_1 \star c_2]$, et ça a un sens. Le point (2) nous donne l'existence d'un élément neutre (la classe du lacet constant en x_0), le (3) l'associativité, le (4) l'existence d'un inverse. $\square$

Exemple 3.3.4. Commençons par un exemple visuel. Imaginons $X = \mathbf{C} - \{0,1\}$, le plan moins deux points, avec un point base dans le demi-plan inférieur, et deux lacets c_1 et c_2 qui tournent autour des points « manquants » comme ceci :



La classe $[c_1] \star [c_2]$ est représentée par n'importe quel lacet homotope à $c_1 \star c_2$. Dessinons-en quelques uns :



C'est le chemin le plus à l'extérieur qui donne la meilleure intuition : le produit d'un lacet qui tourne autour d'un point, avec un autre lacet tournant autour d'un autre point, est un lacet qui encercle les deux points.

Exemple 3.3.5. Voyons l'exemple de $X = \mathbf{C}^*$, avec deux lacets C^1 par morceaux $c_1(t) = \exp(\widetilde{c}_1(t))$ et $c_2(t) = \exp(\widetilde{c}_2(t))$. Posons $n = ind(c_1)$ et $m = ind(c_2)$. Soit alors $\varphi(t) = \widetilde{c}_1(2t)$ pour $t \leq \frac{1}{2}$, et $\varphi(t) = 2ni\pi + \widetilde{c}_2(2t-1)$ pour $t \geq \frac{1}{2}$. Alors φ est bien définie (grâce au $2ni\pi$ dans la formule), continue, et $\exp(\varphi(t)) = c_1 \star c_2(t)$. Donc $ind(c_1 \star c_2) = \varphi(1)/2i\pi = (2ni\pi + \widetilde{c}_2(1))/2i\pi = n + m = ind(c_1) + ind(c_2)$. On constate que

$$\pi_1(\mathbf{C}^*, 1) \cong \mathbf{Z}\,,$$

un isomorphisme de groupes. Et au passage, comme annoncé ci-dessus, on voit que la multiplication $\star$ coïncide avec la multiplication précédente. Dans les exercices, on explore un peu plus le phénomène.

On sait donc associer à chaque espace topologique un groupe ; on va maintenant associer aux applications continues des homomorphismes de groupes. Commençons par le vocabulaire « pointé ».

Définition 3.3.6. Soient X et Y des espaces topologiques, et soient $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$ fixés. On dira que $f\colon X \longrightarrow Y$ est une *application pointée* pour dire que $f(x_0) = y_0$. La *classe d'homotopie pointée* de f, notée $[f]_\bullet$, est la classe de f modulo la relation d'homotopie rel $\{x_0\}$; c'est un élément de $[(X, x_0), (Y, y_0)]$, qui lui-même va être noté $[X, Y]_\bullet$, de sorte que $[f]_\bullet \in [X, Y]_\bullet$. On parlera aussi *d'homotopies pointées* pour dire « rel $\{x_0\}$ ».

Enfin, on dit que f est une *équivalence d'homotopie pointée* s'il existe une application pointée $g\colon Y \longrightarrow X$ telles que $[g \circ f]_\bullet = [id_X]_\bullet$ et $[f \circ g]_\bullet = [id_Y]_\bullet$.

On peut alors poser :

Définition 3.3.7. Soit $f\colon X \longrightarrow Y$ une application pointée (ce qui sous-entend que l'on a choisi, pour la durée de la discussion, des points $x_0 \in X$ et $y_0 \in Y$). On va noter

$$f_*\colon \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(Y, Y_0)$$

l'application définie par $f_*([c]) = [f \circ c]$.

Il faut immédiatement vérifier que :

Lemme 3.3.8. *L'élément $[f \circ c] \in \pi_1(Y, y_0)$ ne dépend que de $[c] \in \pi_1(X, x_0)$, et pas du choix spécifique du lacet c ; de plus, $[f \circ c]$ ne dépend que de $[f]_\bullet$ et pas de f elle-même.*

Démonstration. On doit vérifier en d'autre termes que, si c_0 et c_1 sont homotopes rel $\{0, 1\}$, et si f et g sont homotopes rel $\{x_0\}$, alors $f \circ c_0$ et $g \circ c_1$ sont homotopes rel $\{0, 1\}$. Mais c'est exactement le (3) de la proposition 1.4.11 (ou plus exactement, c'est une version « relative », qu'on vous laisse vérifier). □

Ainsi, f_* est bien défini. Ajoutons tout de suite :

Lemme 3.3.9. *L'application f_* est un homomorphisme de groupes.*

Démonstration. Il faut montrer que $f_*([c_1] \star [c_2]) = f_*([c_1]) \star f_*([c_2])$, mais en fait on a $f \circ (c_1 \star c_2) = (f \circ c_1) \star (f \circ c_2)$, comme on le voit en examinant les définitions. □

Exemple 3.3.10. Soit $f\colon \mathbf{C}^* \longrightarrow \mathbf{C}^*$ définie par $f(z) = z^k$. C'est un exercice instructif, que l'on vous confie, que de vérifier que $ind(f_*(\gamma)) = k \cdot ind(\gamma)$. Donc si l'on identifie $\pi_1(\mathbf{C}^*, 1)$ à $\mathbf{Z}$ comme ci-dessus, alors f_* est la multiplication par k. En notation plus compliquée, on a $f_*(\gamma) = \gamma^{\star k}$ (l'élément γ mis à la puissance k dans le groupe fondamental, que l'on va plutôt noter γ^k à partir de maintenant).

Voyons maintenant les propriétés combinatoires de l'opération $f \mapsto f_*$:

Lemme 3.3.11. *Soit $f\colon X \longrightarrow Y$ et $g\colon Y \longrightarrow Z$ des applications pointées. Alors $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$. D'autre part $(id_X)_* = id_{\pi_1(X,x_0)}$ (« l'identité induit l'identité »).*

C'est tellement évident qu'il n'y rien à dire sur la démonstration ! Par contre, ces deux propriétés sont fondamentales, et pas seulement dans ce contexte : dans un chapitre ultérieur nous verrons la théorie des *foncteurs*, qui est très générale.

Par exemple, on a déjà le corollaire ci-dessous, qui ne dépend que de ce lemme très simple.

Corollaire 3.3.12. *Si X et Y on le même type d'homotopie pointée, alors $\pi_1(X, x_0)$ et $\pi_1(Y, y_0)$ sont des groupes isomorphes. En particulier, si X est un rétract de Y, avec $x_0 = y_0$, alors le groupe fondamental de X est isomorphe à celui de Y.*

Démonstration. Soit $g\colon Y \longrightarrow X$ telle que $[g \circ f]_\bullet = [id_X]_\bullet$ et $[f \circ g]_\bullet = [id_Y]_\bullet$. Alors $(g\circ f)_* = (id_X)_* = id$, mais $(g\circ f)_* = g_* \circ f_*$, donc $g_* \circ f_* = id$. De la même manière, on obtient $f_* \circ g_* = id$. Donc $g_* = (f_*)^{-1}$, et ces homomorphismes sont des isomorphismes. $\square$

On en déduit immédiatement que $\pi_1(S^1, 1) \cong \pi_1(\mathbf{C}^*, 1) \cong \mathbf{Z}$. Et on en déduit aussi, mais de manière négative, qu'il n'existe pas de rétraction de S^1 sur un point, puisque $\pi_1(S^1, 1)$ n'est pas le groupe trivial.

On va maintenant se débarrasser, dans une certaine mesure, des points-base et des homotopies « pointées ». Considérons la construction suivante. On prend un espace topologique X avec deux points $x_0, x_1 \in X$. Supposons qu'il existe un chemin $p\colon I \longrightarrow X$ tel que $p(0) = x_0$ et $p(1) = 1$ – tout ce qui suit dépend du choix de p, et c'est important.

Étant donné un lacet c au point x_1, on construit un lacet $h_p(c)$ au point x_0 par la formule :

$$h_p(c) = p \star (c \star p^{-1}) \,.$$

Proposition 3.3.13. *Soit p un chemin de x_0 à x_1 dans X. Alors l'association $c \mapsto h_p(c)$ induit un isomophisme, qui dépend de p, entre $\pi_1(X, x_1)$ et $\pi_1(X, x_0)$.*

Démonstration. Passons brièvement sur la vérification que $[h_p(c)]$ ne dépend que de $[c]$, c'est encore le lemme du recollement, donc on a bien une application (que l'on note encore h_p) :

$$h_p\colon \pi_1(X, x_1) \longrightarrow \pi_1(X, x_0) \,.$$

Vérifions qu'il s'agit d'un homomorphisme de groupes. On utilise le fait que $\star$ est associatif à homotopie près, et que $p^{-1} \star p$ ainsi que $p \star p^{-1}$ est homotope au lacet constant, lui-même l'élément neutre de $\star$. On écrit alors

$$\begin{aligned} h_p(c_1 \star c_2) &\simeq p \star c_1 \star c_2 \star p^{-1} \\ &\simeq p \star c_1 \star (p^{-1} \star p) \star c_2 \star p^{-1} \\ &\simeq h_p(c_1) \star h_p(c_2)\,. \end{aligned}$$

(C'est l'associativité à homotopie près qui nous dispense de mettre des parenthèses.)

L'inverse de h_p va être donné par $h_{p^{-1}}$, car en effet

$$\begin{aligned} h_{p^{-1}} \circ h_p(c) &\simeq p^{-1} \star p \star c \star p^{-1} \star p \\ &\simeq c\,. \end{aligned}$$

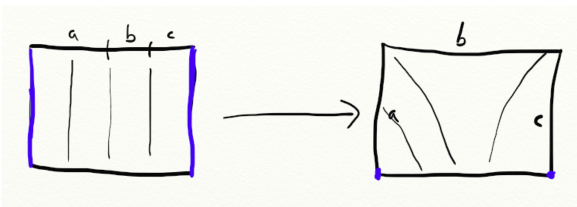
On montre de même que $h_p \circ h_{p^{-1}}$ est l'identité. $\square$

Corollaire 3.3.14. *Si X est connexe par arcs, alors $\pi_1(X, x_0)$ ne dépend pas du choix de x_0, à isomorphisme non-canonique près.*

Parfois, on écrit $\pi_1(X)$ au lieu de $\pi_1(X, x_0)$ lorsque X est connexe par arcs. C'est un abus de notation, un peu similaire à celui qui consiste à écrire $\mathbf{F}_4$ pour « le » corps à 4 éléments (s'il est vrai que deux corps à 4 éléments sont isomorphes, il n'y a pas d'isomorphisme canonique entre les deux, et ça peut avoir son importance). Il est tout de même pratique de pouvoir énoncer sans contorsions que « $\pi_1(\mathbf{R}^n)$ est trivial, car $\mathbf{R}^n$ est contractile », par exemple.

On va aussi regarder les applications, ou les homotopies entre elles, qui ne sont pas pointées. Le petit lemme ci-dessous est bien utile.

Lemme 3.3.15. *Il existe une application continue $\theta\colon [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]^2$ telle que*
- *$\theta(s,0) = (s,0)$, $\theta(0,t) = (0,0)$, et $\theta(1,t) = (1,0)$ pour tous les s, t,*
- *l'image du segment $[0, \frac{1}{2}] \times \{1\}$ est le segment $\{0\} \times [0,1]$, l'image de $[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}] \times \{1\}$ est $[0,1] \times \{1\}$, et enfin l'image de $[\frac{3}{4}, 1] \times \{1\}$ est $\{1\} \times [0,1]$,*
- *la restriction de θ aux segments du point précédent est affine.*



Démonstration. On définit $\varphi\colon [0,1] \longrightarrow [0,1]^2$ par $\varphi(t) = (0, 2t)$ pour $t \leq 1/2$, puis $\varphi(t) = (4t-2, 1)$ pour $1/2 \leq t \leq 3/4$, et enfin $\varphi(t) = (1, 4-4t)$ pour $t \geq 3/4$. Ensuite on pose

$$\theta(s,t) = t\varphi(s) + (1-t)(s,0)\,. \qquad \square$$

Ayant établi ce point, il est facile de montrer que :

Lemme 3.3.16. *Soient X, Y des espaces topologiques, et soient $f, g\colon X \longrightarrow Y$ des applications continues. On prend un point $x \in X$ et on pose $y_0 = f(x) \in Y$, $y_1 = g(x)$ de sorte qu'il y a des homomorphismes*

$$f_*\colon \pi_1(X,x) \longrightarrow \pi_1(Y,y_0) \quad \text{et} \quad g_*\colon \pi_1(X,x) \longrightarrow \pi_1(Y,y_1)\,.$$

Enfin, on suppose qu'il existe une homotopie entre f et g (mais pas spécialement une homotopie pointée !).

Alors il existe un chemin p entre y_0 et y_1 dans Y tel que

$$f_*(\gamma) = h_p(g_*(\gamma))\,.$$

En particulier, si g_* est un isomorphisme, alors f_* aussi.

Démonstration. Soit c un lacet en $x \in X$. Si $F\colon X \times I \longrightarrow Y$ est une homotopie entre f et g, alors $H(s,t) = F(c(s),t)$ est une homotopie $I^2 \longrightarrow Y$ entre $f \circ c = f_*(c)$ et $g \circ c = g_*(c)$. On note ensuite $p(t) = H(0,t) = H(1,t)$, ce qui définit un chemin entre y_0 et y_1. On vérifie alors que $H \circ \theta\colon I^2 \longrightarrow Y$ est une homotopie entre $f_*(c)$ et $p \star (g_*(c) \star p^{-1})$ – et cette fois, c'est une homotopie rel $\{0,1\}$. On a bien montré que $[f_*(c)] = h_p([g_*(c)])$. $\square$

Corollaire 3.3.17. *Si X et Y sont des espaces connexes par arcs, et ayant le même type d'homotopie, alors leurs groupes fondamentaux sont isomorphes (non canoniquement). Plus précisément, toute équivalence d'homotopie*

$$f\colon X \longrightarrow Y$$

induit, pour tout choix de $x \in X$, un isomorphisme

$$f_*\colon \pi_1(X,x) \longrightarrow \pi_1(Y, f(x))\,.$$

Démonstration. Soient $f\colon X \longrightarrow Y$ et $g\colon Y \longrightarrow X$ des équivalences d'homotopie, inverse l'une de l'autre. On choisit $x \in X$ et on pose $y = f(x)$. Puisque $g \circ f \simeq id_X$, la proposition nous dit que $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$ est un isomorphisme. En particulier, $f_*\colon \pi_1(X,x) \longrightarrow \pi_1(Y,y)$ est injectif, et $g_*\colon \pi_1(Y,y) \longrightarrow \pi_1(Y,z)$ est surjectif, où $z = g(y)$. Or, le même raisonnement nous montre que g_* est injectif. Finalement g_* est un isomorphisme, et $f_* = g_*^{-1} \circ (g_* \circ f_*)$ aussi. $\square$

On peut donc enfin énoncer : S^1 n'est pas contractile, car son groupe fondamental n'est pas trivial. Jusqu'à présent, on savait juste qu'il n'existait pas d'équivalence d'homotopie *pointée* entre S^1 et l'espace réduit à un point.

3.4. Le théorème du point fixe de Brouwer

Voici certainement les applications les plus classiques de la théorie du groupe fondamental.

Proposition 3.4.1. *Il n'existe pas d'application continue $B^2 \longrightarrow S^1$ dont la restriction à S^1 est une équivalence d'homotopie.*

En particulier, la restriction à S^1 d'une application $B^2 \longrightarrow S^1$ ne peut pas être l'identité. Intuitivement, on a envie d'y croire, mais il serait très difficile de prouver ceci sans invoquer le π_1 (ou autre outil similaire de topologie algébrique).

Démonstration. Par l'absurde, soit $r\colon B^2 \longrightarrow S^1$, et supposons que $r \circ i\colon S^1 \longrightarrow S^1$ soit une équivalence d'homotopie, où $i\colon S^1 \longrightarrow B^2$ est l'inclusion. D'un côté, le corollaire 3.3.17 nous dit que $(r \circ i)_*$ est un isomorphisme. Mais d'un autre côté, on a $(r \circ i)_* = r_* \circ i_*$. Or la situation (algébrique !) se présente comme ceci :

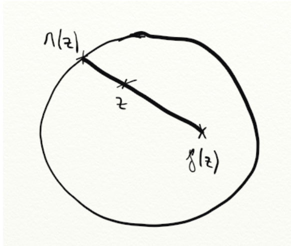
$$\pi_1(S^1, 1) \cong \mathbf{Z} \xrightarrow{\ i_*\ } \pi_1(B^2, 1) = \{1\} \xrightarrow{\ r_*\ } \pi_1(S^1, r(1)) \cong \mathbf{Z}\,.$$

Ici, on a remarqué que $\pi_1(B^2, 1)$ est un groupe trivial, puisque B^2 est contractile. Donc i_* ne peut être que constant, et il est absurde que $r_* \circ i_*$ soit un isomorphisme. □

Théorème 3.4.2 (du point fixe de Brouwer en dimension 2). *Soit $f\colon B^2 \longrightarrow B^2$ une application continue. Alors f possède un point fixe, c'est-à-dire qu'il existe $z_0 \in B^2$ tel que $f(z_0) = z_0$.*

Démonstration. On procède par l'absurde (il est remarquable que cette démonstration n'est pas du tout constructive). Supposons que f n'ait pas de point fixe. On va construire une application r comme il n'en existe pas (!), d'après la proposition précédente.

Un argument classique, très visuel et convaincant, est de définir, pour $z \in B^2$, le point $r(z)$ comme étant le point de rencontre du rayon émanant de z, de direction $z - f(z)$, avec le cercle S^1. La fonction r ainsi définie donne l'identité sur S^1. Par contre, pour vérifier la continuité de r, il faut se remonter un peu les manches, c'est pénible.



Faisons autrement. On définit $r\colon B^2 \longrightarrow S^1$ par la formule

$$r(z) = \frac{z - f(z)}{\|z - f(z)\|}\,.$$

C'est une application continue $B^2 \longrightarrow S^1$. Regardons la restriction de r au cercle S^1, c'est-à-dire la composition $r \circ i$ où $i\colon S^1 \longrightarrow B^2$ est l'inclusion. On définit une homotopie entre $r \circ i$ et l'identité par

$$F(z,t) = \frac{z - tf(z)}{\|z - tf(z)\|}\,.$$

Seule vérification à faire : que le dénominateur ne s'annule pas ! Et en effet, si $z = tf(z)$ pour $z \in S^1$, alors en prenant les modules on voit $1 \leq t$, donc $t = 1$. Mais pour $t = 1$ le dénominateur est $z - f(z)$, qui ne s'annule pas, par hypothèse.

Cette application r contredit la proposition précédente, c'est absurde, donc f a un point fixe. □

3.5. Van Kampen : la moitié facile

L'exercice 20 à la fin du chapitre vous propose de démontrer vous-même une version simplifiée du théorème de Van Kampen. Si vous lisez la suite de cette partie, cet exercice sera rendu caduc. Par ailleurs, nous supposerons ci-dessous, à l'occasion d'un exemple, que vous avez fait l'exercice 23, qui définit le groupe d'homologie $H_1(X)$ à partir du groupe fondamental.

Le théorème de Van Kampen donne une description de $\pi_1(X)$ lorsque X est l'union de U et V, et lorsqu'on connait $\pi_1(U)$, $\pi_1(V)$ et $\pi_1(U \cap V)$, sous certaines hypothèses. On va discuter ce résultat en deux temps : d'abord un travail direct avec les lacets, qui est la « moitié facile », et qui a déjà des applications. Ensuite, dans le chapitre 6, on donnera la version complète du théorème, qui profitera des outils sophistiqués que nous aurons alors introduits.

Proposition 3.5.1 (Van Kampen simplifié). *Soit X un espace topologique. On suppose que $X = U \cup V$, où U et V sont des ouverts connexes par arcs, et on suppose que $U \cap V$ est connexe par arcs (et non-vide). Prenons $x_0 \in U \cap V$ comme point-base dans la suite. Enfin, soient $i\colon U \longrightarrow X$ et $j\colon V \longrightarrow X$ les inclusions. Alors le groupe $\pi_1(X)$ est engendré par les deux sous-groupes $i_*(\pi_1(U))$ et $j_*(\pi_1(V))$.*

Démonstration. Soit c un lacet dans X en x_0. Par compacité, on trouve une subdivision $t_0 = 0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$ telle que $c([t_i, t_{i+1}]) \subset U$ ou $c([t_i, t_{i+1}]) \subset V$, pour chaque indice i. S'il s'avère que $c([t_i, t_{i+1}]) \subset U$ et $c([t_{i+1}, t_{i+2}]) \subset U$, alors on retire t_{i+1} de la subdivision, et pareil avec V remplaçant U. A la fin, l'image de c sur $[t_i, t_{i+1}]$ est alternativement contenue dans U, puis V, puis U, puis V, etc.

En particulier, on a $t_i \in U \cap V$ pour chaque i. Soit p_i un chemin dans $U \cap V$ menant de x_0 à $c(t_i)$. Pour faciliter les notation, on va poser $c_i\colon [0,1] \longrightarrow X$ défini par $c_i(t) = c(t_i + t(t_{i+1} - t_i))$. On a alors

$$c \simeq c_0 \star c_1 \star \cdots \star c_{n-1}\,,$$

en écrivant $\simeq$ pour l'homotopie rel $\{0,1\}$ (en effet, les deux chemins ci-dessus s'obtiennent mutuellement par reparamétrisation). Écrivons alors

$$\begin{aligned} c &\simeq c_0 \star (p_1^{-1} \star p_1) \star c_1 \star (p_2^{-1} \star p_2) \star c_2 \star \cdots \star (p_{n-1}^{-1} \star p_{n-1}) \star c_{n-1} \\ &\simeq (c_0 \star p_1^{-1}) \star (p_1 \star c_1 \star p_2^{-1}) \star \cdots \star (p_{n-1} \star c_{n-1})\,. \end{aligned}$$

Or les chemins $c_0 \star p_1^{-1}$, $p_i \star c_i \star p_{i+1}^{-1}$ et $p_{n-1} \star c_{n-1}$ sont tous des lacets en x_0, et ils sont chacun contenu soit dans U (ce qui revient à dire que le lacet donne un élément du $\pi_1(X)$ qui est de la forme $i_*(g)$ pour $g \in \pi_1(U)$) soit dans V (et alors l'élément est de la forme $j_*(h)$ pour $h \in j_*(\pi_1(V))$).

Ainsi tout élément de $\pi_1(X)$ s'obient comme produit d'éléments de $\pi_1(U)$ et de $\pi_1(V)$, comme annoncé. $\square$

Exemple 3.5.2. Prenons pour X « l'espace en forme de 8 », formé de deux cercles tangents. On choisit pour U un ouvert qui se rétracte sur un des deux cercles de X, et pour V un ouvert qui se rétracte sur l'autre ; on s'arrange pour que $U \cap V$ se rétracte sur x_0, le point où les deux cercles sont tangents. (Si on veut, on peut prendre $U = X - \{x_1\}$ et $V = X - \{x_2\}$ avec x_1 et x_2 différents de x_0, et pris sur des cercles différents.)

On sait que $\pi_1(U) \cong \pi_1(S^1) \cong \mathbf{Z}$. Soit alors $a \in \pi_1(U)$ un générateur de ce groupe, en notation multiplicative (donc $\pi_1(U)$ est l'ensemble des a^n pour $n \in \mathbf{Z}$). De même, soit $b \in \pi_1(V)$ un générateur. Posons ensuite $x = i_*(a)$ et $y = j_*(b)$

La proposition affirme alors que tout élément de $\pi_1(X)$ est un « mot » en x et y (genre $x^{12}y^{-4}x^3y^2$). Le « vrai » théorème de Van Kampen, démontré plus loin, montre essentiellement qu'il n'y a pas de relations entre x et y (et en particulier $\pi_1(X)$ est infini, et non commutatif).

Ce qu'on peut faire tout de suite, c'est calculer l'abélianisé $H_1(X)$ du groupe $\pi_1(X)$ (c'est ici que l'on suppose que vous avez fait l'exercice 23). C'est un groupe abélien engendré par deux éléments, à savoir les images $\overline{x}$ et $\overline{y}$ de x et y. On peut donc définir, en utilisant une notation additive sur $H_1(X)$, un homomorphisme surjectif

$$\psi\colon \mathbf{Z}^2 \longrightarrow H_1(X)$$

$$(n,m) \mapsto n\overline{x} + m\overline{y}\,.$$

On va définir une application « dans l'autre sens ». Soient A et B les deux cercles dans X, de sorte que $A \cap B = \{x_0\}$. On définit $f\colon X \longrightarrow S^1$ en prenant f constante, égale à 1, sur B, tandis que la restriction de f à A est un homéomorphisme avec S^1, avec $f(x_0) = 1$. Cette application f est continue (lemme du recollement).

On peut donc considérer $f_*\colon \pi_1(X,x_0) \longrightarrow \pi_1(S^1,1) \cong \mathbf{Z}$. Par construction, $f_*(y) = 0$ et $f_*(x)$ est un générateur de $\pi_1(S^1,1)$. De manière symétrique, on construit $g_*\colon \pi_1(X,x_0) \longrightarrow \mathbf{Z}$ tel que $g_*(x) = 0$ et $g_*(y)$ est un générateur. Finalement, on obtient

$$\varphi\colon \pi_1(X,x_0) \longrightarrow \mathbf{Z}^2$$

$$x \mapsto (1,0)\,,$$

$$y \mapsto (0,1)\,.$$

Et bien sûr, φ donne un homomorphisme $\overline{\varphi}\colon H_1(X) \longrightarrow \mathbf{Z}^2$ (propriété fondamentale de l'abélianisé). On constate alors que $\overline{\varphi} \circ \psi$ est l'identité, donc ψ est injective en plus d'être sur surjective. Finalement

$$H_1(X) \cong \mathbf{Z}^2\,.$$

3.6. Exercices

Exercice 17. Montrer que $c \star e \simeq c$, pour tout chemin c, où e est le chemin constant en $c(1)$ (*c'est une propriété énoncée sans démonstration dans le cours*).

Exercice 18. Soit X connexe par arcs. On dit que X est *simplement connexe* lorsque $\pi_1(X) = 1$. Montrer qu'il y a équivalence entre

1. X est simplement connexe,
2. si c_1 et c_2 sont des chemins quelconques (*pas forcément des lacets !*) dans X, tels que $c_1(0) = c_2(0)$ et $c_1(1) = c_2(1)$, alors $c_1 \simeq c_2$ rel $\{0,1\}$.

Exercice 19. Soit X « l'espace en forme de 8 », formé de deux cercles tangents.

1. Trouver deux applications continues $\iota_1, \iota_2 \colon S^1 \longrightarrow X$, et deux autres p_1, $p_2 \colon X \longrightarrow S^1$, telles que $p_i \circ \iota_j$ est un homéomorphisme si $i = j$, mais est constante si $i \neq j$.
2. En déduire une propriété algébrique du groupe $\pi_1(X)$ qui montre qu'il n'est pas trivial, et pas isomorphe à $\mathbf{Z}$ non plus. Énoncer des conséquences pour le type d'homotopie de X.

Exercice 20. Soit X un espace tel que $X = U \cup V$ avec U et V ouverts et simplement connexes, et $U \cap V$ connexe par arcs. On choisit un point $x_0 \in U \cap V$, et tous les lacets considérés ci-dessous sont basés en x_0.

1. Montrer, en utilisant un argument de compacité, que pour tout chemin c dans X, il existe une subdivision $t_0 = 1 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = 1$ de $[0, 1]$ telle que $c([t_i, t_{i+1}]) \subset U$ ou $c([t_i, t_{i+1}]) \subset V$.
2. Montrer qu'un lacet c quelconque dans X est homotope à un lacet dans $U \cap V$.
3. Conclure que X est simplement connexe.

   On appelle ce résultat le « théorème spécial de Van Kampen », cas particulier du théorème de Van Kampen traité dans le chapitre.
4. Montrer que, pour $n \geq 2$, la sphère S^n est simplement connexe. Commenter.

Exercice 21. Soit X un espace, et p et q deux chemins entre x_0 et x_1. Comparer les isomorphismes h_p et h_q. En déduire en particulier que, si $\pi_1(X)$ est abélien, alors $h_p = h_q$.

Tous les groupes $\pi_1(X, x)$, à mesure que x varie, sont alors canoniquement *isomorphes, contrairement au cas général.*

Exercice 22. Soit G un groupe. On appelle *sous-groupe dérivé de G*, et on note G', le sous-groupe engendré par toutes les expressions de la forme $aba^{-1}b^{-1}$, pour $a, b \in G$ (qu'on appelle des commutateurs).

1. Montrer que, si $\varphi \colon G \longrightarrow H$ est un homomorphisme, alors $\varphi(G') \subset H'$. En déduire que G' est distingué dans G.
2. On note $G^{ab} = G/G'$. Montrer que G^{ab} est abélien. On l'appelle *l'abélianisé* de G.
3. Montrer que $\varphi \colon G \longrightarrow H$ induit $\varphi^{ab} \colon G^{ab} \longrightarrow H^{ab}$.
4. Montrer que, si $\varphi \colon G \longrightarrow A$ est un homomorphisme avec A abélien, alors il existe $\overline{\varphi} \colon G^{ab} \longrightarrow A$ tel que $\varphi = \overline{\varphi} \circ p$, où $p \colon G \longrightarrow G^{ab}$ est l'application canonique.

5. Pour $G = S_3$, le groupe symétrique sur 3 éléments, décrire G^{ab}.

Exercice 23. Cet exercice utilise les deux précédents.

Soit X connexe par arcs. On pose

$$H_1(X, x_0) := \pi_1(X, x_0)^{ab} .$$

Montrer que si $x_1 \in X$, alors il existe un isomorphisme *canonique*

$$h_{x_0,x_1} \colon H_1(X, x_0) \cong H_1(X, x_1) .$$

On peut alors, sans faire un abus de notation trop dangereux, noter simplement $H_1(X)$. Ce groupe abélien est appelé *le premier groupe d'homologie de X*.

Exercice 24. Trouver un isomorphisme entre $\pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$ et $\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0))$. En déduire une description du groupe fondamental du tore.

Plus difficile : il y a deux projections $p_X \colon X \times Y \longrightarrow X$ et $p_Y \colon X \times Y \longrightarrow Y$, ainsi que deux inclusions $\iota_X \colon X \longrightarrow X \times Y$, $\iota_X(x) = (x, y_0)$, et $\iota_Y \colon Y \longrightarrow X \longrightarrow Y$, $\iota_Y(y) = (x_0, y)$. Exprimer l'isomorphisme ci-dessus, ainsi que son inverse, à partir des homomorphismes induits par ces quatre applications.

Exercice 25.

1. On suppose que Γ est un ensemble avec *deux* lois de groupe, notées $\cdot$ et $\star$, et vérifiant

   $$(\alpha \cdot \beta) \star (\gamma \cdot \delta) = (\alpha \star \gamma) \cdot (\beta \star \delta) ,$$

   pour tout $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in G$. On suppose de plus que les deux lois de groupe ont le même élément neutre.

   Montrer alors que les deux lois coïncident, et sont commutatives.

2. On suppose que G est un *groupe topologique*, c'est-à-dire que G est un groupe, et simultanément G est un espace topologique, de sorte que la multiplication $(x, y) \mapsto x \cdot y$ est une application continue $G \times G \longrightarrow G$, et l'application $G \longrightarrow G$ donnée par $x \mapsto x^{-1}$ est également continue.

   On peut penser à $G = \mathbf{C}^*$, ou $G = GL_n(\mathbf{C})$, ou à certains sous-groupes de ce dernier comme U_n ou $O(n)$, etc.

   À l'aide de la question précédente, montrer que $\pi_1(G, 1)$ est abélien (où 1 est l'élément neutre), et qu'en plus on a deux définitions possibles de la loi de groupe.

Chapitre 4

Revêtements

Pour l'instant nous ne savons pas calculer le π_1 de beaucoup d'espaces. Essentiellement nous savons que lorsqu'un espace est contractile, alors son groupe fondamental est trivial, et nous avons vu que $\pi_1(S^1) \cong \mathbf{Z}$.

Dans ce chapitre nous introduisons les revêtements. Le théorème principal va énoncer, grosso modo, que si $\pi_1(E) = 1$, et si G est un groupe qui agit de manière raisonnable sur E, alors $\pi_1(E/G) \cong G$. Pour calculer le groupe fondamental d'un espace X, on pourra travailler à l'envers, et chercher E et G tels que $X = E/G$, et $\pi_1(E) = 1$. Ainsi pour le cercle S^1, on a $S^1 = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ et on retrouvera $\pi_1(S^1) \cong \mathbf{Z}$.

Le chapitre suivant démontrera que E et G existent toujours, tels que $E/G = X$ et $\pi_1(E) = 1$: tout espace est un quotient d'un espace simplement connexe. (On rappelle, cf l'exercice 18, qu'un espace est dit simplement connexe lorsqu'il est connexe par arcs et que son groupe fondamental est trivial.) C'est une propriété théorique étonnante, et il y en a bien d'autres. La théorie des revêtements, que nous motivons ci-dessus par le désir de savoir mener plus de calculs, s'avère extrêmement riche et profonde.

4.1. Revêtements

Définition 4.1.1. Soit $p\colon E \longrightarrow X$ une application continue. On dit que p est un *revêtement* lorsque chaque point $x \in X$ possède un voisinage $U \subset X$ tel que $p^{-1}(U)$ est l'union disjointe d'ouverts U_α (indexés par $\alpha \in p^{-1}(x)$) tels que la restriction de p à chaque U_α est un homéomorphisme $U_\alpha \longrightarrow U$.

(En particulier, un revêtement est une application surjective et ouverte.)

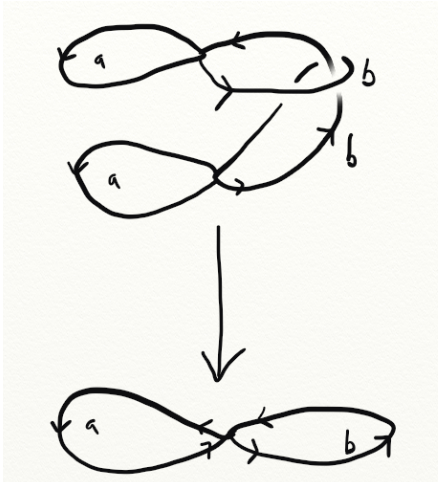


Figure 4.1. Un revêtement à deux feuillets de l'espace en forme de 8

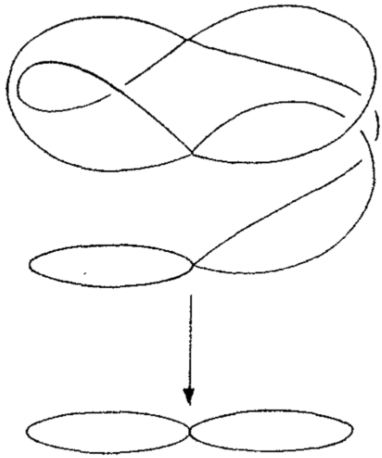


Figure 4.2. Un revêtement à trois feuillets du même espace

Commençons par des exemples visuels. Sur la figure 4.1, on a pris pour X l'espace en forme de 8, dessiné en bas. On a *à peu près* dessiné E (qui est homéomorphe à trois cercles tangents deux à deux) au dessus de X, avec e au-dessus de $p(e)$. Attention, la scène n'est pas vraiment « plongée » dans $\mathbf{R}^3$ (c'est un peu comme pour la bouteille de Klein, on ne peut pas faire un dessin tout-à-fait correct). Par contre, un chemin marqué a ou b est envoyé sur le chemin avec la même étiquette dans X. Prenez le temps de repérer visuellement la propriété qui caractérise les revêtements. Par exemple, si $x_0 \in X$ est le point où les deux cercles sont tangents, alors X ressemble « à une croix » au voisinage de x_0 ; et la même chose est donc vraie au voisinage des deux points de $p^{-1}(x_0)$ dans E.

Ici, chaque point de X a deux antécédents : on dit que c'est un revêtement à deux feuillets (ou de degré 2). La figure suivante montre un revêtement à trois feuillets (de degré 3).

Pour donner des exemples rigoureux, le mieux est de considérer la situation suivante.

Définition 4.1.2. Soit G un groupe agissant sur l'espace E. On suppose que pour chaque $g \in G$ fixé, l'application $x \mapsto g \cdot x$ est continue ; c'est donc automatiquement un homéomorphisme, d'inverse $x \mapsto g^{-1} \cdot x$.

On dit alors que l'action est *discrète* si chaque point de E possède un voisinage $U \subset E$ tels que les ensembles gU, pour $g \in G$, sont tous disjoints.

Remarques 4.1.3.

1. On dit parfois que l'action est *proprement discontinue*, au lieu de dire qu'elle est discrète, mais ça sème un peu la confusion – l'action étant belle et bien continue !
2. On rappelle qu'une action d'un groupe G sur un ensemble E est dite *libre* lorsque, pour $e \in E$ et $g \in G$, l'égalité $g \cdot e = e$ entraîne $g = 1$, l'élément neutre. Une action discrète est, en particulier, libre (petit exercice).
3. Si U est comme ci-dessus, alors deux points distincts $x_1, x_2 \in U$ ne sont jamais dans la même orbite (si $x_2 = g \cdot x_1$ alors $x_2 \in U \cap gU$). Autrement dit, l'ouvert U intersecte chaque orbite de G en 0 ou 1 point. Considérons alors une orbite $G \cdot x$ qui ne contient pas le point $y \in E$, prenons U comme dans la définition avec $y \in U$, et ajoutons l'hypothèse que X est séparé : on en déduit, en réduisant U si nécessaire, qu'il existe un voisinage V de y tel que $V \cap G \cdot x = \emptyset$. Autrement dit, *les orbites sont fermées*, sous cette hypothèse.
4. Dans tous les exemples concrets (voir ci-dessous), l'action sera également isométrique, et on pourra considérer X/G comme un espace métrique, comme dans le chapitre 1. Ceci dit, dans le cas général, on voit X/G comme un espace topologique, une partie $U \subset X/G$ étant ouverte si et seulement si $p^{-1}(U)$ est ouvert dans X, en écrivant $p\colon X \longrightarrow X/G$ pour l'application naturelle. Si vous avez lu le chapitre 2, alors vous n'êtes pas surpris par ce choix ! Mais dans le cas contraire, vous savez par le lemme 1.5.6 que les ouverts de X/G doivent être de cette forme dans les bons cas. Vous pouvez alors rajouter mentalement l'hypothèse que l'action est isométrique si ça vous rassure. Nous allons établir quelques résultats abstraits sur les actions discrètes, qui ne sont pas plus difficiles à démontrer dans le cas général que dans le cas des actions isométriques.

Exemple 4.1.4. Considérons les actions de $\mathbf{Z}$ sur $\mathbf{R}$ et $\mathbf{R} \times [-1, 1]$ qui donnent (comme quotient) le cercle et le ruban de Moebius, ainsi que les actions sur $\mathbf{R}^2$ qui donnent le tore ou la bouteille de Klein. Dans chaque cas, on a déjà vu que l'action est isométrique (et en particulier chaque application $x \mapsto g{\cdot}x$ est continue, puisque c'est une isométrie) et fermée. Vous vérifierez dans chaque cas que l'action est aussi discrète.

Pour un exemple d'action qui n'est pas discrète, revenons à S^1 qui agit sur $\mathbf{C}^*$. Les orbites sont des cercles, donc des espaces connexes, qu'on ne peut certainement pas recouvrir par des ouverts disjoints non-vides.

Lemme 4.1.5. *Si G agit discrètement sur E, alors l'application quotient $p\colon E \longrightarrow X = E/G$ est un revêtement. De plus, si H est un sous-groupe de G, alors l'application induite $E/H \longrightarrow E/G$ est un aussi revêtement.*

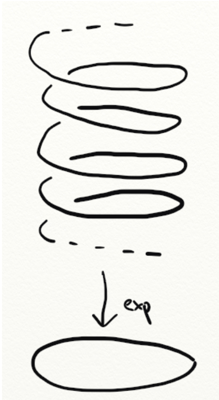
Démonstration. Chaque application $y \mapsto gy$ est un homéomorphisme (d'inverse $y \mapsto g^{-1}y$). Donc si U est comme dans la définition d'une action discrète, les différents ensembles gU sont tous ouverts, et $p(U)$ aussi d'après la définition de la topologie quotient. Il est clair que l'application $gU \longrightarrow p(U)$ induite par p est bijective, continue et ouverte. Ceci montre que p est un revêtement.

Soit maintenant H un sous-groupe de G, et choisissons des éléments g_α tel que G est l'union disjointe des classes Hg_α. Soient $p_1 : E \longrightarrow E/H$ et $p_2 : E/H \longrightarrow E/G$ les applications évidentes, et gardons un ouvert U dans E comme ci-dessus. Alors pour chaque α, l'ensemble $V_\alpha = p_1(g_\alpha U)$ est ouvert dans E/H, puisque son image inverse par p_1 est $Hg_\alpha U$, qui est l'union des ouverts $hg_\alpha U$ pour $h \in H$. Les différents V_α sont disjoints, par choix des g_α.

On a $p_2(V_\alpha) = p(U)$, qui est un ouvert de X comme déjà observé. On a également déjà noté que p réalise un homéomorphisme $g_\alpha U \longrightarrow p(U)$; la même remarque, appliqué au groupe H plutôt que G, nous montre que p_1 est un homéomorphisme $g_\alpha U \longrightarrow V_\alpha$. Par suite, la restriction de p_2 à V_α vaut $p \circ p_1^{-1}$, c'est donc encore un homéomorphisme.

Finalement, on a bien exprimé $p_2^{-1}(p(U))$ comme l'union disjointe des V_α, qui sont homéomorphes à $p(U)$ par p_2, donc $p(U)$ est trivial pour p_2. Ceci montre que p_2 est un revêtement. □

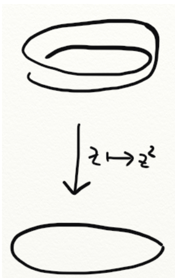
Exemple 4.1.6. L'action de $G = \mathbf{Z}$ sur $E = \mathbf{R}$ par $n \cdot y = n + y$ est discrète. Donc $\mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ est un revêtement, ainsi que l'application $\mathbf{R} \longrightarrow S^1$ donnée par $x \mapsto e^{2i\pi x}$ (c'est la composée d'un revêtement et d'un homéomorphisme).



Maintenant, prenons le sous-groupe $H = n\mathbf{Z}$. On a donc un revêtement $p\colon \mathbf{R}/n\mathbf{Z} \longrightarrow \mathbf{R}/\mathbf{Z}$. Regardons le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{R}/n\mathbf{Z} & \xrightarrow{x \mapsto e^{\frac{2i\pi x}{n}}} & S^1 \\ {\scriptstyle p}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle z \mapsto z^n} \\ \mathbf{R}/\mathbf{Z} & \xrightarrow{x \mapsto e^{2i\pi x}} & S^1 \end{array}$$

Les applications horizontales sont des homéomorphismes, et on en déduit que $z \mapsto z^n$ est un revêtement $S^1 \longrightarrow S^1$. Pour $n = 2$, la situation est la suivante :

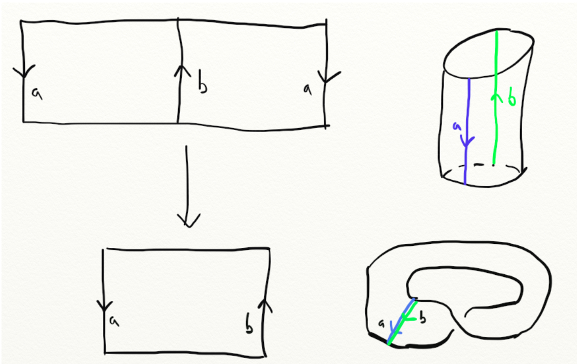


Remarque 4.1.7. De la même manière, on a un revêtement $\mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}/\mathbf{Z}$. Si on regarde l'application $\exp\colon \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}^*$ donnée par $z \mapsto e^{2i\pi z}$, alors elle se factorise comme la composée du revêtement $\mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}/\mathbf{Z}$ et de l'application induite $\mathbf{C}/\mathbf{Z} \longrightarrow \mathbf{C}^*$; cette dernière est encore un homéomorphisme, comme dans le cas de $\mathbf{R}/\mathbf{Z} \longrightarrow S^1$ (l'argument le plus rapide est sans doute d'utiliser le fait

que $\exp$ est une application ouverte car elle est holomorphe, cf votre cours d'analyse complexe, ensuite on applique le lemme 1.5.8). Donc $\exp$ est elle-même un revêtement. On en déduit ensuite que $z \mapsto z^n$ est un revêtement $\mathbf{C}^* \longrightarrow \mathbf{C}^*$.

Exemple 4.1.8. Prenons $E = \mathbf{R} \times [-1, 1] \subset \mathbf{C}$, et soit $\varphi\colon E \longrightarrow E$ définie par $\varphi(z) = 1 + \overline{z}$. On fait agir $\mathbf{Z}$ sur E par $n \cdot y = \varphi^{\circ n}(y)$. Alors l'action est discrète, et $E/\mathbf{Z}$ s'identifie au ruban de Moebius M.

En argumentant comme dans le cas de S^1, on trouve pour chaque $n \in \mathbf{Z}$ un revêtement $E/n\mathbf{Z} \longrightarrow M$. Pour $n = 2$ on voit que $E/2\mathbf{Z}$ est un cylindre.



Définition 4.1.9. On dira qu'un espace X est *localement connexe* lorsque, pour chaque $x \in X$ et chaque ouvert U tel que $x \in U$, il existe un ouvert connexe par arcs $V \subset U$ tel que $x \in V$.

Cette condition est évidemment locale ; on en déduit que si $p\colon E \longrightarrow X$ est un revêtement, alors X est localement connexe $\Longleftrightarrow$ E est localement connexe (exercice à la fin du chapitre).

Voici une version préliminaire du théorème principal de ce chapitre.

Théorème 4.1.10. *Soit $p\colon E \longrightarrow X$ un revêtement. On suppose que X est connexe et localement connexe, et que E est simplement connexe. Alors il existe un groupe G agissant discrètement sur E, de sorte que $X \cong E/G$, et p s'identifie à l'application $E \longrightarrow E/G$.*

De plus, pour tout G comme ci-dessus, on a un isomorphisme

$$G \cong \pi_1(X, x_0)\,,$$

pour tout choix de $x_0 \in X$.

Nous énoncerons plus loin une version plus précise (et en particulier, l'isomorphisme est explicite). Dans les premiers temps, on ne se servira pas trop de la première moitié : l'existence de G sera automatique, puisque nous allons regarder des espaces définis comme étant de la forme E/G. L'intérêt du théorème sera dans le fait que $\pi_1(E/G) \cong G$. Dans le chapitre suivant ceci dit, on essaiera de classifier *tous* les revêtements d'un X donné, et le fait qu'un tel G puisse toujours être trouvé sera très pratique.

Exemple 4.1.11. Puisque $\mathbf{R}$ est simplement connexe et localement connexe, le théorème nous permet de retrouver que $\pi_1(S^1) \cong \pi_1(\mathbf{R}/\mathbf{Z}) \cong \mathbf{Z}$. Pour essentiellement les mêmes raisons, on trouve que $\pi_1(M) = \pi_1(([-1,1] \times \mathbf{R})/\mathbf{Z}) \cong \mathbf{Z}$, ce qu'on savait déjà puisque le ruban de Moebius M a le type d'homotopie d'un cercle.

On trouve également que $\pi_1(\mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2) \cong \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$, ce que l'on savait grâce à un exercice sur le groupe fondamental d'un produit. Pour la bouteille de Klein, on trouve enfin quelque chose de nouveau : nous avons décrit K comme $\mathbf{R}^2/G$, où G est un certain groupe de la forme $\mathbf{Z} \rtimes \mathbf{Z}$ (voir l'exercice 14). Le théorème nous donne $\pi_1(K) \cong G$, notre premier exemple (rigoureux) de groupe fondamental non abélien (en fait pour l'espace X en forme de 8, le groupe $\pi_1(X)$ est déjà non abélien).

Tout le reste du chapitre est consacré à la preuve du théorème principal. En passant, nous allons également introduire des outils qui sont très importants pour la suite : relèvements, action de monodromie, action galoisienne.

On vous recommande les exercices 26 à 31 avant de poursuivre.

4.2. Relèvements

Un peu de vocabulaire : si $p\colon E \longrightarrow X$ est un revêtement, on dit d'un ouvert $U \subset X$ qu'il est « trivial pour p » lorsque $p^{-1}(U) = \coprod_\alpha U_\alpha$, comme dans la définition de « revêtement », c'est-à-dire que la restriction de p à chaque U_α est un homéomorphisme $U_\alpha \longrightarrow U$. En général on notera $\varphi_\alpha\colon U \longrightarrow U_\alpha$ pour l'inverse.

De plus, si $p\colon E \longrightarrow X$ est un revêtement et $f\colon Y \longrightarrow X$ est une application continue, un *relèvement* de f (par rapport à p) est une application continue $\widetilde{f}\colon Y \longrightarrow E$ telle que $p \circ \widetilde{f} = f$. Dans cette partie, nous étudions l'existence et l'unicité des relèvements. (Il est assez pénible qu'en français, les mots « revêtement » et « relèvement » aient une telle consonance, alors qu'ils désignent des choses bien différentes, attention à ne pas bafouiller.)

Théorème 4.2.1. *Soit $p\colon E \longrightarrow X$ un revêtement, avec X localement connexe.*

Si $\gamma\colon [0,1] \longrightarrow X$ est un chemin dans X, et si $e \in E$ est tel que $p(e) = \gamma(0)$, alors il existe un unique chemin $\widetilde{\gamma}\colon [0,1] \longrightarrow E$ tel que $\gamma = p \circ \widetilde{\gamma}$ et $\widetilde{\gamma}(0) = e$.

Comme d'habitude, nous sous-entendons le fait que γ et $\widetilde{\gamma}$ sont continus (évidemment c'est essentiel pour l'unicité). Au risque de gâcher l'effet de surprise, nous pouvons révéler la progression qui nous attend : ce théorème va être utilisé pour se généraliser lui-même aux applications $[0,1]^2 \longrightarrow E$, puis aux applications $Y \longrightarrow E$ où $\pi_1(Y) = 1$, avec la même conclusion. On passe donc de $[0,1]$ à $[0,1]^2$ puis à tout espace simplement connexe.

Démonstration. Avec un argument de compacité, on trouve une subdivision

$$t_0 = 0 < t_1 < t_1 < \cdots < t_n = 1$$

telle que sur l'intervalle $[t_i, t_{i+1}]$, le chemin γ prend ses valeurs dans un ouvert $U \subset X$ qui est trivial pour p. En composant γ avec un homéomorphisme $\varphi_\alpha\colon U \longrightarrow U_\alpha$, on peut donc trouver un « relèvement » $\widetilde{\gamma}_i = \varphi_\alpha \circ \gamma$ sur chacun de ces intervalles. De plus, en ajustant l'indice α, on peut choisir librement $\widetilde{\gamma}_i(t_i)$ parmi tous les élements de $p^{-1}(\gamma(t_i))$. En procédant de proche en proche, l'existence de $\widetilde{\gamma}$ est démontrée.

Soit γ' un autre relèvement. L'ensemble A des $t \in [0,1]$ tels que $\gamma'(t) = \widetilde{\gamma}(t)$ est fermé, par continuité. Montrons qu'il est ouvert aussi. Pour ça, on prend t tel que $\gamma'(t) = \widetilde{\gamma}(t)$, et un ouvert U contenant $\gamma(t)$ choisi à la fois connexe et trivial pour p ; les U_α sont les composantes connexes de $p^{-1}(U)$. Il existe un intervalle I_t contenant t sur lequel γ est à valeurs dans U, donc γ' et $\widetilde{\gamma}$ sont à valeurs dans $p^{-1}(U)$; par connexité de I_t, les chemins γ' et $\widetilde{\gamma}$ prennent en fait leurs valeurs dans un seul U_α, pour le même α puisqu'en t ces deux chemins passent par le même point. Ceci montre que sur I_t on a $\gamma' = \widetilde{\gamma} = \varphi_\alpha \circ \gamma$ où φ_α est l'homéomorphisme $U \longrightarrow U_\alpha$ inverse de p (appliquer φ_α, ce qui a maintenant un sens, aux égalités $p \circ \gamma' = p \circ \widetilde{\gamma} = \gamma$). Donc A est ouvert.

Par connexité de $[0,1]$, on a $A = [0,1]$ ou $A = \emptyset$, donc si γ' et $\widetilde{\gamma}$ prennent la même valeur en 0, ce sont les mêmes chemins. $\square$

Evidemment ça généralise ce qu'on a fait avec $\mathbf{C}^*$ (et plus besoin de supposer que les chemins sont C^1 par morceaux !).

On peut tout de suite énoncer un résultat très général sur l'unicité des relèvements (pour l'existence, il va falloir travailler un peu plus) :

Corollaire 4.2.2. *Soit Y un espace connexe par arcs, soit $y_0 \in Y$, et soit $f\colon Y \longrightarrow X$ telle que $f(y_0) = p(e)$. S'il existe un relèvement $\widetilde{f}\colon Y \longrightarrow E$ tel que $f = p \circ \widetilde{f}$ et tel que $\widetilde{f}(y_0) = e$, alors il est unique.*

Démonstration. Soit $y \in Y$, soit c un chemin dans Y telle que $\gamma(0) = y_0$ et $\gamma(1) = y$, et soit $\gamma = f \circ c$. Soit $\widetilde{\gamma}$ l'unique relèvement de γ tel que $\widetilde{\gamma}(0) = e$, comme ci-dessus. Puisque $\widetilde{f} \circ c$ est un relèvement aussi, qui part du même point, on a $\widetilde{f} \circ c = \widetilde{\gamma}$, et il est nécessaire que $\widetilde{f}(y) = \widetilde{\gamma}(1)$. □

En observant cette démonstration, on aurait envie de montrer *l'existence* d'un relèvement $\widetilde{f}$ en posant $\widetilde{f}(y) = \widetilde{\gamma}(1)$. On a deux problèmes : vérifier que ceci ne dépend pas du choix du chemin c, et si on peut franchir ce premier obstacle, vérifier que $\widetilde{f}$ est continue.

On va voir que le point essentiel est de traiter le cas des homotopies :

Théorème 4.2.3. *Soit $p\colon E \longrightarrow X$ un revêtement, avec X localement connexe. Si $F\colon [0,1] \times [0,1] \longrightarrow X$ est une homotopie dans X, et si $e \in E$ est tel que $p(e) = F(0,0)$, alors il existe une unique homotopie $\widetilde{F}\colon [0,1] \times [0,1] \longrightarrow E$ telle que $F = p \circ \widetilde{F}$ et $\widetilde{F}(0,0) = e$.*

Démonstration. On pourrait prendre un chemin canonique entre $(0,0)$ et n'importe quel point (x,y) (par exemple un segment), et définir $\widetilde{F}$ en utilisant le théorème précédent ; mais il resterait le problème de montrer la continuité de $\widetilde{F}$, et c'est loin d'être évident.

Alors on procède comme dans la démonstration précédente. On trouve des nombres t_i tels que sur chaque rectangle $K_{ij} = [t_i, t_{i+1}] \times [t_j, t_{j+1}]$, la fonction F prend ses valeurs dans un ouvert trivial pour p. On peut donc trouver un relèvement $\widetilde{F}_{ij}$ sur K_{ij}, de la forme $\varphi_\alpha \circ F|_{K_{ij}}$, et en choisissant α on peut ajuster $\widetilde{F}_{ij}(t_i, t_j)$ à notre guise.

Prenons deux rectangles K_{ij} et $K_{k\ell}$ avec un côté en commun, disons $k = i+1$ et $\ell = j$ par exemple. On peut choisir $\widetilde{F}_{k\ell}$ de façon à ce qu'il prenne en (t_{i+1}, t_j) la même valeur que $\widetilde{F}_{ij}$. Mais alors, ces deux relèvements doivent prendre les mêmes valeurs tout le long de leur côté commun, qui est connexe par arcs, par le corollaire. Ensemble, les fonctions $\widetilde{F}_{ij}$ et $\widetilde{F}_{k\ell}$ définissent une fonction continue sur $K_{ij} \cup K_{k\ell}$ (lemme du recollement), qui est un relèvement de F.

Ainsi on peut ajuster les $\widetilde{F}_{ij}$ de proche en proche afin de définir $\widetilde{F}$. L'unicité est garantie par le dernier corollaire. □

Corollaire 4.2.4. *Si γ_0 et γ_1 sont deux chemins homotopes dans X, par une homotopie F rel $\{0,1\}$, et si $\widetilde{\gamma}_0$ et $\widetilde{\gamma}_1$ désignent les relèvements tels que $\widetilde{\gamma}_0(0) = \widetilde{\gamma}_1(0) = e$, alors on a $\widetilde{\gamma}_0(1) = \widetilde{\gamma}_1(1)$.*

De plus, le relèvement $\widetilde{F}$ de l'homotopie F tel que $\widetilde{F}(0,0) = e$ est une homotopie rel $\{0,1\}$ entre $\widetilde{\gamma}_0$ et $\widetilde{\gamma}_1$.

Démonstration. L'homotopie F entre γ_0 et γ_1 se relève en une homotopie $\widetilde{F}$, par le théorème. On peut choisir $\widetilde{F}(0,0) = e$ donc $t \mapsto F(t,0)$ n'est autre que le chemin $\widetilde{\gamma}_0$.

Les chemins $t \mapsto \widetilde{F}(0,t)$ et $t \mapsto \widetilde{F}(1,t)$ sont à valeurs dans les ensembles discrets $p^{-1}(\gamma_0(0))$ et $p^{-1}(\gamma_0(1))$ respectivement, ils sont donc constants par connexité. Ainsi $t \mapsto F(t,1)$ « part » du point e, c'est donc le chemin $\widetilde{\gamma}_1$. Finalement $\widetilde{\gamma}_0(1) = F(1,0) = F(1,1) = \widetilde{\gamma}(1)$. La dernière phrase du corollaire a été montrée au passage. □

Là encore, on avait montré ça pour $X = \mathbf{C}^*$. Un conseil à ce stade : on vous recommande fortement l'exercice 32, qui est un classique.

Ayant traité le cas des chemins et celui des homotopies, c'est-à-dire les relèvements de fonctions définies sur $[0,1]$ ou sur $[0,1]^2$, on saute directement au cas d'un espace quelconque. Le résultat suivant contient les deux précédents comme cas particuliers, et les généralise de manière spectaculaire.

Théorème 4.2.5 (théorème du relèvement). *Soit $p\colon E \longrightarrow X$ un revêtement, avec X localement connexe, soit Y connexe par arcs et localement connexe, et soit $f\colon Y \longrightarrow X$ une application continue. Choisissons $x_0 = f(y_0) \in X$ et $e \in E$ tel que $p(e) = x_0$.*

Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

1. *il existe une unique application continue $\widetilde{f}\colon Y \longrightarrow E$ telle que $f = p \circ \widetilde{f}$ et $\widetilde{f}(y_0) = e$,*
2. *$f_*(\pi_1(Y, y_0)) \subset p_*(\pi_1(E, e))$.*

En particulier, ce théorème montre que si $\pi_1(Y) = 1$, le relèvement $\widetilde{f}$ existe toujours ! En première lecture, vous pouvez d'ailleurs suivre la démonstration en supposant que $\pi_1(Y)$ est trivial, ce qui facilite un peu les choses.

Démonstration. Le fait que (1) $\Longrightarrow$ (2) est évident, puisque dans ce cas $f_* = p_* \circ \widetilde{f}_*$. Montrons (2) $\Longrightarrow$ (1). L'unicité étant garantie par le corollaire 4.2.2, il faut montrer l'existence de $\widetilde{f}$.

Soit c_0 un chemin dans Y entre y_0 et y, soit $\gamma_0 = f \circ c_0$. Si $\widetilde{f}$ existe, alors $\widetilde{f} \circ c_0 = \widetilde{\gamma}_0$, l'unique relèvement de γ_0 qui part de e. Pour *définir* $\widetilde{f}$ en posant $\widetilde{f}(y) = \gamma_0(1)$, il faut montrer que cette expression ne dépend pas du choix de c_0.

Soit donc c_1 un autre chemin entre y_0 et y, soit $\gamma_1 = f \circ c_1$, et soit $c = c_1^{-1} \star c_0$, qui est un lacet en y_0. Soit $\gamma = f \circ c$, de sorte que $[\gamma] = f_*([c])$. Par hypothèse on peut donc trouver un lacet τ dans E, basé en e, tel que $p_*([\tau]) = [\gamma]$. En d'autres termes $p \circ \tau$ est homotope à γ, et le corollaire 4.2.4 montre que le relèvement $\widetilde{\gamma}$ de γ est un lacet. La restriction de $\widetilde{\gamma}$ à $[\frac{1}{2}, 1]$ est le relèvement de γ_1^{-1} qui part de $\widetilde{\gamma}_0(1)$, et ce relèvement arrive donc en e. En prenant l'inverse, on constate que le relèvement de γ_1 qui part de e arrive en $\widetilde{\gamma}_0(1)$, donc finalement $\widetilde{\gamma}_0(1) = \widetilde{\gamma}_1(1)$.

Il faut vérifier que $\widetilde{f}$, ainsi définie, est continue. Prenons $y_1 \in Y$, et soit V un ouvert de Y connexe par arcs, tel que $y_1 \in V$, et tel que $f(V) \subset U$, où U est trivial pour p. Sur V, l'application $\widetilde{f}$ a la description suivante : pour $y \in V$, on choisit un chemin c dans V entre y_1 et y, et alors $\widetilde{f}(y)$ est l'extrêmité de l'unique relèvement de c en un chemin dans E qui démarre en $\widetilde{f}(y_1)$. (Pour vérifier que cette description est correcte, utiliser l'existence d'un chemin de y_0 à y_1, le concaténer avec c, et utiliser l'unicité des relèvements.)

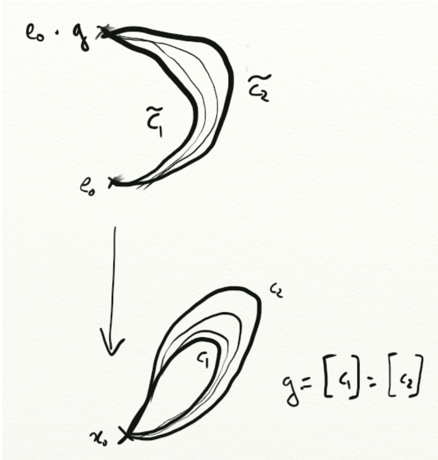
Dans nos notations habituelles, prenons pour chaque α un homéomorphisme $\varphi_\alpha \colon U \longrightarrow U_\alpha$ inverse de p. On déduit de la description de $\widetilde{f}$ que celle-ci coïncide sur V avec $\varphi_\alpha \circ f$, qui est continue, pour un certain choix de α (celui tel que $\widetilde{f}(y_1) \in U_\alpha$). Donc $\widetilde{f}$ est continue sur un voisinage de y_1, qui est arbitraire. □

L'exercice 33 donne une application classique.

4.3. Monodromie

On continue de considérer un revêtement $p \colon E \longrightarrow X$ avec X localement connexe. Introduisons maintenant une action (à droite !) de $\pi_1(X, x_0)$ sur $p^{-1}(e_0)$, appelée *l'action de monodromie.*

Étant donné $e \in p^{-1}(x_0)$ et $g = [c] \in \pi_1(X, x_0)$, considérons $\widetilde{c}$, l'unique relèvement dans E tel que $\widetilde{c}(0) = e$. Le point $\widetilde{c}(1)$ ne dépend que de la classe de c à homotopie près, c'est-à-dire de g, par le corollaire 4.2.4. On peut donc poser sans ambiguïté $e \cdot g = \widetilde{c}(1)$.



Proposition 4.3.1. *On a une action à droite du groupe $\pi_1(X, x_0)$ sur l'ensemble $p^{-1}(x_0)$. Cette action est transitive si E est connexe, et le stabilisateur de $e_0 \in E$ est $p_*(\pi_1(E, e_0))$.*

En particulier, si E est simplement connexe, alors le stabilisateur décrit est trivial, et $p^{-1}(x_0)$ est en bijection avec G, par $g \mapsto e_0 \cdot g$. Comme il a fallu choisir e_0, ce n'est pas canonique, par contre.

Démonstration. On doit d'abord vérifier que

$$e \cdot (gh) = (e \cdot g) \cdot h\,.$$

En termes de chemins, on veut montrer la chose suivante. Soit c_1 et c_2 deux lacets, avec $g = [c_1]$ et $h = [c_2]$, soit $\widetilde{c}_1$ le relèvement tel que $\widetilde{c}_1(0) = e$, et soit $\widetilde{c}_2$ le relèvement tel que $\widetilde{c}_2(0) = \widetilde{c}_1(1)$. Alors il faut vérifier que $\widetilde{c}_1 \star \widetilde{c}_2$ est le relèvement de $c_1 \star c_2$ qui part de e. Mais c'est évident !

Si E est supposé connexe par arcs, et qu'on a deux points $e, f \in p^{-1}(x_0)$, alors on peut trouver un chemin c qui mène de l'un à l'autre. Mais alors $c = p \circ c$ est un lacet en x_0, qui représente un élément $g \in \pi_1(X, x_0)$; par définition même $e \cdot g = f$. Donc l'action est transitive.

Enfin, si $g = [c]$ est tel que $e_0 \cdot g = e_0$, alors c se relève en un lacet $\widetilde{c}$ en $e_0 \in p^{-1}(x_0)$. Ce qui veut bien dire que $g = p_*([\widetilde{c}])$, c'est-à-dire que g appartient au sous-groupe $p_*(\pi_1(E, e_0))$. □

Le corollaire ci-dessous est l'une des choses les plus utiles à savoir dans la théorie des revêtements :

Corollaire 4.3.2. *On suppose que X est simplement connexe et localement connexe, que $p\colon E \longrightarrow X$ est un revêtement, et que E est connexe par arcs. Alors p est un homéomorphisme.*

Démonstration. On sait déjà que p est surjective et ouverte, il suffit donc de montrer qu'elle est injective, ou encore que pour tout $x_0 \in X$, l'ensemble $p^{-1}(x_0)$ est réduit à un élément. Or, d'après la proposition, le groupe trivial $\pi_1(X, x_0) = 1$ agit transitivement sur $p^{-1}(x_0)$, d'où l'assertion. □

L'action de monodromie sera rendue plus concrète à la fin du chapitre, et ce dernier corollaire aussi. Pour l'instant, contentons-nous de remarquer que grâce au corollaire, et lorsque X est simplement connexe, on peut montrer une condition globale (p est un homéomorphisme) en vérifiant une condition locale (p est un revêtement).

4.4. Le groupe de Galois

Définition 4.4.1. Soient $p\colon E \longrightarrow X$ et $q\colon F \longrightarrow X$ deux revêtements. Un *morphisme* entre les deux est une application continue $f\colon E \longrightarrow F$ telle que $q \circ f = p$; on dit que f est un *isomorphisme* entre ces deux revêtements lorsque, de plus, f est un homéomorphisme. Le *groupe de Galois* de p est le groupe de tous les isomorphismes de E avec lui-même, que nous les appellerons automorphismes. On le note $Gal(p)$ ou $Gal(E/X)$.

Exemple 4.4.2. À titre d'exercice, vous montrerez la chose suivante : dire que $p\colon E \longrightarrow X$ est isomorphe, comme revêtement, à l'identité $X \longrightarrow X$, est exactement équivalent à dire que E est un homéomorphisme. Voilà pourquoi, lorsqu'un revêtement est aussi un homéomorphisme, on dit parfois qu'il est trivial.

Remarque 4.4.3. Si on suppose que E et F comme ci-dessus sont connexes par arcs, alors un morphisme f entre eux est entièrement déterminé par une seule de ses valeurs, d'après le corollaire 4.2.2. Cette remarque va servir constamment, donc gardez la bien en tête.

L'exemple fondamental est le suivant :

Lemme 4.4.4. *Considérons un revêtement de la forme $p\colon E \longrightarrow E/G$ (avec une action discrète), où E est connexe par arcs. Alors le groupe de Galois est isomorphe à G.*

Démonstration. On a un homomorphisme $\varphi\colon G \longrightarrow Gal(p)$ évident : à $g \in G$ on fait correspondre l'application $\varphi(g)\colon x \mapsto gx$, qui est bel et bien un élément de $Gal(p)$. Ce φ est un homomorphisme par définition d'une action à gauche, et il est injectif car l'action est discrète donc libre. Si $f \in Gal(p)$, prenons $e \in E$ et considérons $f(e) = g \cdot e$ pour un certain $g \in G$. Alors l'application f et l'action de g sont deux morphismes de revêtements qui prennent la même valeur en e, ils sont donc égaux par la remarque précédente. Donc $f = \varphi(g)$ et φ est surjectif. $\square$

Lorsque X est localement connexe, on peut considérer à la fois les automorphismes de E et l'action de monodromie sur E, et les deux sont en fait compatibles :

Lemme 4.4.5. *Les automorphismes de E commutent avec l'action de monodromie. En clair si $\sigma\colon E \longrightarrow E$ est un automorphisme, on a $\sigma(e \cdot g) = \sigma(e) \cdot g$ pour $g \in \pi_1(X, x_0)$.*

Démonstration. C'est presque évident : si $\widetilde{\gamma}$ est le relèvement de γ qui part de e, alors $\sigma \circ \widetilde{\gamma}$ est le relèvement du même γ qui part de $\sigma(e)$. $\square$

Nous voici enfin en position de prouver le théorème principal du chapitre. Voici une version plus détaillée.

Théorème 4.4.6. *Soit $p\colon E \longrightarrow X$ un revêtement. On suppose que X est connexe et localement connexe, et que E est simplement connexe. Le groupe $G := Gal(p)$ agit discrètement sur E, et on a un homéomorphisme $f\colon E/G \longrightarrow X$ tel que $p = f \circ q$, où $q\colon E \longrightarrow E/G$ est l'application quotient.*

Fixons $x_0 \in X$ et $e_0 \in p^{-1}(x_0)$. On a alors un isomorphisme

$$\tau\colon G \longrightarrow \pi_1(X, x_0)$$

caractérisé par la propriété (pour $g \in Gal(p)$)

$$g(e_0) = e_0 \cdot \tau(g)\,,$$

où l'action à droite est celle de monodromie. En d'autres termes, si c est un chemin dans E entre e_0 et $g(e_0)$, alors $p \circ c$ est un lacet dans X qui représente $\tau(g) \in \pi_1(X, x_0)$.

Démonstration. Montrons d'abord que, sous les hypothèses du théorème, les orbites de G sont exactement les fibres de p. Certainement, si $e_0 \in p^{-1}(x_0)$, alors $g(e_0) \in p^{-1}(x_0)$ si $g \in G$, par définition de G. Réciproquement, si $e \in p^{-1}(x_0)$, alors le théorème du relèvement (E étant simplement connexe !) nous donne un unique morphisme $g\colon E \longrightarrow E$ compatible avec p, tel que $g(e_0) = e$. Il faut vérifier que $g \in G$, c'est-à-dire que g est bien un homéomorphisme. Mais c'est très simple : le même théorème du relèvement donne $h\colon E \longrightarrow E$ tel que $h(e) = e_0$, donc $h \circ g(e_0) = e_0$. Or l'unicité des relèvements donne dans ce cas $h \circ g = id_E$. L'application g est bien un homéomorphisme, d'inverse h.

On a bien montré que $p^{-1}(x_0)$ est une orbite de G. Et de plus, l'unicité du g ci-dessus montre que $g \mapsto g \cdot e_0$ est une bijection entre G et $p^{-1}(x_0)$ (en d'autres termes, l'action est libre).

On a une bijection continue $f\colon E/G \longrightarrow X$ telle que $p = f \circ q$ (ici on applique le lemme 2.1.2, qui généralise le lemme 1.5.8 de passage au quotient quand on n'a pas d'hypothèse sur l'action). Si U est un ouvert de X trivial pour p, et si U_α est un ouvert de E homéomorphe à U par p, alors les ouverts gU_α sont disjoints à mesure que g décrit G (si $x \in gU_\alpha \cap U_\alpha$ alors $g \cdot y = x$ avec $x, y \in U_\alpha$ donc $p(x) = p(y)$, ce qui donne $x = y$ et g est l'identité par la remarque ci-dessus). On constate que G agit discrètement, puisque tout $e \in E$ a un voisinage de la forme U_α comme ci-dessus. De plus, en gardant les notations, $q(U_\alpha)$ est ouvert dans E/G, puisque $q^{-1}(q(U_\alpha))$ est l'union des $g \cdot U_\alpha$, et $f(q(U_\alpha)) = p(U_\alpha) = U$, donc f est une application ouverte (tout point de E/G ayant un voisinage de la forme $q(U_\alpha)$). Finalement, f est un homéomorphisme. On a donc montré la première partie du théorème, et il reste à discuter l'isomorphisme τ.

Dans la suite, on remplace X par E/G, où $G = Gal(p)$. Pour terminer la preuve du théorème, il nous faut identifier $Gal(p)$ avec $\pi_1(X, x_0)$. Pour cela on pourrait vouloir étendre l'action de monodromie de $\pi_1(X)$ à *toutes* les fibres à la fois, donc à E, mais quand on formalise, les choses se passent de la manière suivante. Si $g \in \pi_1(X, x_0)$, on considère le point $e = e_0 \cdot g$, image de e_0 par l'action de monodromie. Alors, il existe un unique $\sigma_g \in Gal(p) \cong G$ tel que $\sigma_g(e_0) = e$.

Notons alors que l'association $g \mapsto \sigma_g$ est un homomorphisme, de $\pi_1(X, x_0)$ vers $Gal(p)$. En effet, calculons :

$$\begin{array}{rcll} \sigma_{gh}(e_0) & = & e_0 \cdot gh & \text{(définition)} \\ & = & (e_0 \cdot g) \cdot h & \text{(action à droite)} \\ & = & \sigma_g(e_0) \cdot h & \text{(définition)} \\ & = & \sigma_g(e_0 \cdot h) & \text{(lemme)} \\ & = & \sigma_g(\sigma_h(e_0)) & \text{(définition)}\,. \end{array}$$

Donc σ_{gh} et $\sigma_g \circ \sigma_h$ prennent la même valeur en e_0, et doivent coïncider.

Il est immédiat que cet homomorphisme est surjectif (car l'action de monodromie est transitive) et que son noyau est trivial (car les stabilisateurs dans l'action sont triviaux).

Pour compléter la démonstration, il suffit de poser $\tau = \sigma^{-1}$, et la caractérisation donnée est claire. □

Exemple 4.4.7. Nous avons vu qu'en identifiant S^1 avec $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$, et en considérant le revêtement $p\colon \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}/\mathbf{Z}$, on constate que $\pi_1(S^1) \cong \mathbf{Z}$. Mais le théorème dans sa version ci-dessus montre plus. En prenant 0 comme point-base de $\mathbf{R}$, et donc 1 comme point-base de S^1, on peut prendre le chemin $\widetilde{\gamma}$ défini sur $[0, 1]$

par $\widetilde{\gamma}(t) = tn$ pour rejoindre 0 et n. En composant avec p puis avec l'homéomorphisme $\mathbf{R}/\mathbf{Z} \longrightarrow S^1$ qui envoie x sur $e^{2i\pi x}$, constate que le chemin

$$t \mapsto e^{2ni\pi t}$$

représente $n \in \mathbf{Z}$ dans le groupe $\pi_1(S^1, 1)$. On obtient donc un générateur de ce groupe en faisant $n = 1$.

Soit maintenant $f\colon S^1 \longrightarrow S^1$ définie par $f(z) = z^k$ pour un certain $k \in \mathbf{Z}$. Il est clair d'après la description ci-dessus que l'application induite

$$f_*\colon \pi_1(S^1, 1) \longrightarrow \pi_1(S^1, 1)$$

est la multiplication par k. Bref, on a retrouvé les résultats du chapitre précédent.

Exemple 4.4.8. On peut retrouver le résultat du corollaire 4.3.2. En effet, sous les hypothèses du corollaire, appliquons le résultat de l'exercice 32, qui nous dit que p_* est injectif, et donc que E est également simplement connexe. Le théorème s'applique. Alors $G = Gal(p)$ est le groupe trivial, et $p = f \circ q$ où f est un homéomorphisme et $q\colon E \longrightarrow E/G = E$ est l'identité. Donc $p = f$ est un homéomorphisme.

4.5. Exercices

Exercice 26. Soit $p\colon E \longrightarrow X$ un revêtement, avec X connexe. Montrer que si $p^{-1}(x_0)$ est fini pour un $x_0 \in X$, alors $p^{-1}(x)$ est fini pour tous les $x \in X$, de même cardinalité.

Si cette cardinalité est n, on dit alors que p est un revêtement à n feuillets, ou de degré n.

Exercice 27. Vérifier que la composition d'un revêtement et d'un homéomorphisme est un revêtement. La composition de deux revêtements est-elle un revêtement ?

Attention, tel quel c'est plus difficile qu'il n'y paraît. Mais en ajoutant une certaine hypothèse qu'on vous laisse deviner, la réponse est beaucoup plus claire.

Exercice 28. Soit $p\colon E \longrightarrow X$ un revêtement, où X est un espace topologique quelconque. Soit $Y \subset X$. Montrer que l'application $p^{-1}(Y) \longrightarrow Y$ obtenue par restriction est un revêtement de Y.

Exercice 29. Donner un exemple d'espace qui est localement connexe mais pas connexe, puis un exemple d'espace qui est connexe mais pas localement connexe.

Exercice 30. Montrer que, si X est localement connexe et connexe, alors il est connexe par arcs.

Exercice 31. Vérifier que, si $p\colon E \longrightarrow X$ est un revêtement, alors X est localement connexe $\Longleftrightarrow$ E est localement connexe.

Exercice 32. Soit $p\colon E \longrightarrow X$ avec E et X connexes et localement connexes. On choisit $x_0 \in X$ et $e \in p^{-1}(x_0)$. Montrer que l'homomorphisme

$$p_*\colon \pi_1(E, e) \longrightarrow \pi_1(X, x_0)$$

est injectif.

C'est aussi le lemme 5.1.1 du chapitre suivant, donc vous avez la correction.

Exercice 33. Un *caractère* de S^1 est par définition un *homomorphisme continu* $S^1 \longrightarrow S^1$. On va déterminer tous les caractères possibles. Notons $p\colon \mathbf{R} \longrightarrow S^1$ pour le revêtement usuel $p(x) = \exp(2i\pi x)$.

1. Soit $\chi\colon S^1 \longrightarrow S^1$ un caractère. Montrer qu'il existe une application continue $\widetilde{\chi}\colon \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ telle que $p \circ \widetilde{\chi} = \widetilde{\chi} \circ p$, qui est unique si on impose la condition $\widetilde{\chi}(0) = 0$.
2. Montrer que $\widetilde{\chi}$ est un homomorphisme de groupes abéliens.
3. En déduire qu'il existe un entier $n \in \mathbf{Z}$ tel que $\widetilde{\chi}(x) = nx$ pour tout $x \in \mathbf{R}$.
4. Finalement, conclure que $\chi(z) = z^n$ pour tout $z \in S^1$.

Exercice 34. Reprendre l'exercice 13 avec ses notations.

1. Décrire $\pi_1(\mathbf{R}P^n)$ pour $n \geq 2$. Que dire pour $n = 1$?
2. Soit γ un chemin quelconque du pôle sud au pôle nord dans S^n (pour $n \geq 2$). Montrer que l'image $\overline{\gamma}$ de γ dans $\mathbf{R}P^2$ est un générateur de $\pi_1(\mathbf{R}P^2)$, et expliquer « géométriquement » pourquoi $\overline{\gamma} \star \overline{\gamma}$ est trivial.

Exercice 35.

1. Pour $k \in \mathbf{Z}$, on considère l'espace $S^2_k \subset \mathbf{R}^3$ défini par

$$S^2_k = \left\{ p \in \mathbf{R}^3 \text{ tels que } \|p - (k, 0, 0)\| = \frac{1}{2} \right\},$$

   où $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne. Ensuite on pose

$$X_n = \bigcup_{-n \leq k \leq n} S^2_k \,.$$

   Faire un dessin de X_n, puis calculer le groupe $\pi_1(X_n)$, pour tout $n \geq 0$.
2. On pose

$$X_\infty = \bigcup_{n \in \mathbf{Z}} X_n = \bigcup_{k \in \mathbf{Z}} S^2_k \,.$$

   Montrer que le groupe $\pi_1(X_\infty)$ est trivial.

3. On fait agir le groupe $\mathbf{Z}$ sur X_∞ par

$$n \cdot (x, y, z) = (n + x, y, z) .$$

   Montrer que cette action est discrète, puis calculer $\pi_1(X_\infty/\mathbf{Z})$.
4. Trouver un domaine fondamental pour l'action. En déduire que $X_\infty/\mathbf{Z}$ est compact, et faire un dessin.

Chapitre 5

La classification des revêtements

Dans le chapitre précédent, nous avons étudié les revêtements de la forme $p\colon E \longrightarrow X$ en se concentrant surtout sur le cas où E est simplement connexe. Nous nous tournons maintenant vers le cas général. Le but n'est plus de calculer $\pi_1(X)$, mais de montrer l'existence d'un lien précis entre revêtements de X et sous-groupes de $\pi_1(X)$. Les points techniques ont presque tous été vus au chapitre précédent, de sorte que les arguments ci-dessous sont plus faciles à suivre (sauf peut-être pour le théorème sur l'existence des revêtements universels).

5.1. Les sous-groupes associés à un revêtement

On fixe un espace X, connexe et localement connexe, et un point-base $x_0 \in X$. À tout revêtement $p\colon E \longrightarrow X$ avec E connexe, on va associer un sous-groupe de $\pi_1(X, x_0)$, ou plus exactement, une famille de sous-groupes. L'idée la plus naturelle, évidemment est de regarder $p_*(\pi_1(E, e))$ pour un $e \in p^{-1}(x_0)$. Des remarques viennent alors immédiatement.

Lemme 5.1.1. *Pour p comme ci-dessus, l'application p_* est injective.*

Ainsi, $p_*(\pi_1(E, e))$ est un groupe isomorphe à $\pi_1(E, e)$ lui-même.

Démonstration. Supposons que $p_*([c]) = 1$ pour un lacet c dans E, basé au point $e \in E$. Par définition, cela signifie que le lacet $\gamma = p \circ c$ dans X est homotope au lacet constant en $p(e)$, disons par une homotopie F.

Noter que c est le relèvement de γ, bien sûr. L'homotopie F se relève en une homotopie $\widetilde{F}$ entre c et le relèvement du lacet constant en $p(e)$; mais par unicité, ce relèvement est le lacet constant en e. Donc $[c] = 1$ dans $\pi_1(E, e)$, ce qui montre que $\ker p_* = \{1\}$, c'est-à-dire que p_* est injective. $\square$

Deuxième interrogation évidente, le choix de e est-il important ? Voici la réponse.

Lemme 5.1.2. *Choisissons un premier point $e_0 \in p^{-1}(x_0)$. À mesure que e décrit la fibre $p^{-1}(x_0)$, le groupe $p_*(\pi_1(E, e))$ décrit l'ensemble des conjugués du groupe $p_*(\pi_1(E, e_0))$ dans $\pi_1(X, x_0)$.*

Démonstration. Si $e \in p^{-1}(x_0)$, choisissons un chemin $\widetilde{\gamma}$ dans E de e_0 à e. On a alors un isomorphisme

$$h_{\widetilde{\gamma}} \colon \pi_1(E, e) \longrightarrow \pi_1(E, e_0)$$

comme dans la proposition 3.3.13. Il est clair que $p_*(h_{\widetilde{\gamma}}(x)) = [\gamma] \star p_*(x) \star [\gamma]^{-1}$, où $\gamma = p \circ \widetilde{\gamma}$ (noter que ce γ est un lacet !). Donc les sous-groupes $p_*(\pi_1(E, e_0))$ et $p_*(\pi_1(E, e))$ de $\pi_1(X, x_0)$ sont conjugués.

Pour la réciproque, on relève γ en $\widetilde{\gamma}$ et on procède comme ci-dessus (exercice). $\square$

On a donc associé à p une *classe de conjugaison de sous-groupes de* $\pi_1(X, x_0)$.

Définition 5.1.3. Si $p \colon E \longrightarrow X$ est un revêtement, comme ci-dessus, avec $x_0 \in X$ comme point-base, on note $\mathscr{C}(p)$, ou $\mathscr{C}(E)$ par abus, la classe de conjugaison de $p_*(\pi_1(E, e))$, pour n'importe quel $e \in p^{-1}(x_0)$.

La notation $\mathscr{C}(p)$ ne fait pas référence au point-base x_0. On pourra écrire $\mathscr{C}(p, x_0)$ si on veut préciser, mais le risque de confusion est, de toute façon, faible. En effet, si $x_1 \in X$ est un autre point-base, alors on peut prendre un chemin c de x_0 à x_1, ce qui donne un isomorphisme $h_c \colon \pi_1(X, x_1) \longrightarrow \pi_1(X, x_0)$; de plus, on a vu (exercice 21) que si c est remplacé par c', alors h_c et $h_{c'}$ sont conjugués, donc on a une bijection *canonique* (= qui ne dépend pas du choix de c) entre les classes de conjugaison dans $\pi_1(X, x_0)$ et celles dans $\pi_1(X, x_1)$. L'écriture $\mathscr{C}(p)$ désigne donc sans ambiguïté une classe de conjugaison dans chaque $\pi_1(X, x)$ avec $x \in X$.

Le résultat suivant est remarquable.

Proposition 5.1.4. *Soit $p_i \colon E_i \longrightarrow X$ un revêtement, pour $i = 1, 2$, avec X comme ci-dessus, et E_i connexe. Il y a équivalence entre*

1. *p_1 et p_2 sont isomorphes,*
2. *$\mathscr{C}(p_1) = \mathscr{C}(p_2)$.*

Démonstration. Voyons (1) $\implies$ (2) (la moins surprenante des deux implications). Par hypothèse on a un homéomorphisme $f\colon E_1 \longrightarrow E_2$ tel que $p_2 \circ f = p_1$, donc $(p_2)_* \circ f_* = (p_1)_*$. On en tire

$$(p_1)_*(\pi_1(E_1, e_1)) = (p_2)_* \left(f_*(\pi_1(E_1, e_1))\right) = (p_2)_*(\pi_1(E_2, e_2)) \,,$$

où $e_2 = f(e_1)$. On a utilisé que $f_*(\pi_1(E_1, e_1) = \pi_1(E_2, e_2))$ car f_* est un isomorphisme. Les groupes qui sont, respectivement, à gauche et à droite de cette égalité sont des représentants de $\mathscr{C}(p_1)$ et $\mathscr{C}(p_2)$.

Maintenant, voyons (2) $\implies$ (1), et supposons donc que $\mathscr{C}(p_1) = \mathscr{C}(p_2)$. En utilisant le lemme 5.1.2, on voit que si on se donne n'importe quel $e_1 \in p_1^{-1}(x_0)$, alors on peut choisir $e_2 \in p_2^{-1}(x_0)$ tel que $(p_1)_*(\pi_1(E_1, e_1)) = (p_2)_*(\pi_1(E_2, e_2))$.

Mais alors, le théorème du relèvement dans sa forme générale (4.2.5), appliqué au revêtement p_2, nous donne un relèvement $f\colon E_1 \longrightarrow E_2$ de p_1, c'est-à-dire que $p_2 \circ f = p_1$, et f est unique si on exige de plus $f(e_1) = e_2$. Par symétrie, on a $g\colon E_2 \longrightarrow E_1$ qui est un relèvement de p_2 et tel que $g(e_2) = e_1$. La composition $g \circ f$ vérifie $p_1 \circ (g \circ f) = p_1$ et $g \circ f(e_1) = e_1$, donc par unicité $g \circ f = id_{E_1}$. De même $f \circ g = id_{E_2}$, et on a bien trouvé un isomorphisme entre p_1 et p_2. □

Dans le reste du chapitre, on va montrer que, sous une hypothèse très raisonnable, on peut montrer également que chaque classe de conjugaison est de la forme $\mathscr{C}(p)$ pour un certain revêtement p (pour parler vite, on vient de voir que l'association $p \mapsto \mathscr{C}(p)$ est injective, en quelque sorte, et nous verrons qu'elle est surjective également).

En particulier, cela signifie qu'il doit exister $p\colon E \longrightarrow X$ tel que $\mathscr{C}(p)$ est la classe du sous-groupe trivial. Alors, puisque p_* est injective, on en déduit que E est simplement connexe. Nous verrons que si on arrive à trouver ce p, alors on trouvera tous les autres.

5.2. Le revêtement universel

Définition 5.2.1. On dira qu'un espace X est *localement contractile* lorsque pour tout point $x \in X$ et tout voisinage V de x, il existe un ouvert $U \subset V$ contenant x, et qui se rétracte sur x.

Un espace localement contractile est en particulier localement connexe. Les espaces topologiques qui nous sont familiers sont *tous* localement contractiles – en fait, nous avons surtout regardé des « variétés », c'est-à-dire des espaces tels que chaque point a un voisinage homéomorphe à $\mathbf{R}^n$, ou bien des espaces obtenus en « recollant » des variétés, telle la figure 8, et tous ces espaces sont localement contractiles. En réalité, il faudrait travailler beaucoup pour exhiber un contre-exemple, et ça n'est pas dans l'esprit de ce cours.

Théorème 5.2.2. *Soit X connexe et localement contractile. Alors il existe un revêtement $E \longrightarrow X$ avec E simplement connexe.*

La démonstration que voici est un peu difficile, et elle ne contient pas vraiment d'idées qui seront réutilisées par la suite. En première lecture, vous pouvez admettre le résultat.

Démonstration. On commence par analyser un peu la situation. Supposons que $p\colon E \longrightarrow X$ soit effectivement un revêtement avec E simplement connexe. Fixons $x_0 \in X$ et $e_0 \in p^{-1}(x_0)$. Alors pour tout point $e \in E$, on peut choisir un chemin c_e de e_0 à e, et sa classe d'homotopie rel $\{0,1\}$, notée $\gamma_e = [c_e]$, ne dépend que de e, puisque E est simplement connexe. De même, la classe $[p \circ c_e]$ ne dépend que de γ_e (proposition 1.4.11) donc que de e. Si on note

$$E_0 = \{[c] \mid c\colon [0,1] \longrightarrow X, c(0) = x_0\}\,, \tag{*}$$

où $[c]$ est la classe de c rel $\{0,1\}$, alors on a une application

$$\varphi\colon E \longrightarrow E_0$$

définie par $\varphi(e) = [p \circ c_e]$. Nos résultats sur le relèvement des chemins assurent que φ est surjective, et ceux sur le relèvement des homotopies garantissent que φ est injective. Donc φ est une bijection.

De plus, si on définit $p_0\colon E_0 \longrightarrow X$ par

$$p_0([c]) = c(1)\,, \tag{**}$$

alors p_0 est bien définie et $p_0 \circ \varphi = p$. On a donc « reconstruit » E et p en utilisant des définitions qui ne dépendent que de X.

On peut maintenant commencer la démonstration proprement dite. On définit $E = E_0$ comme dans (*), on définit $p = p_0$ comme dans (**), et il s'agit de mettre une topologie sur E qui fasse de p un revêtement. Puis, il faudra montrer que E est simplement connexe.

On va faire plusieurs de ces choses à la fois. Prenons $x \in X$, puis choisissons $U \subset X$, un ouvert qui se rétracte sur x ; on a donc une homotopie

$$F\colon U \times [0,1] \longrightarrow U$$

telle que $F(u,0) = x$, $F(u,1) = u$. Pour tout $u \in U$, on note $c_u(t) = F(u,t)$, un chemin de x à u. Pour tout $\alpha \in p^{-1}(x)$, on définit

$$\varphi_\alpha\colon U \longrightarrow E$$

par $\varphi_\alpha(u) = \alpha \star [c_u]$ (on rappelle que α est lui-même la classe d'un chemin de x_0 à x). Et pour finir, on pose $U_\alpha = \varphi_\alpha(U) \subset E$. Bien sûr $p \circ \varphi_\alpha$ est l'identité, donc φ_α réalise une bijection $U \longrightarrow U_\alpha$.

Vérifions que $p^{-1}(U)$ est l'union disjointe des divers U_α (ça va être une conséquence formelle des propriétés de l'opération $\star$). Un élément de $p^{-1}(U)$ est par définition la classe d'un chemin c de x_0 à un point $u \in U$. Mais alors $[c] = [c]\star[c_u^{-1}]\star[c_u] = \alpha\star[c_u] = \varphi_\alpha(u) \in U_\alpha$, en posant $\alpha = [c]\star[c_u^{-1}]$. Donc $p^{-1}(U)$ est l'union des U_α, et pour vérifier que cette union est disjointe, on écrit que $\alpha\star[c_u] = \beta\star[c_u]$ entraîne $\alpha = \beta$, en multipliant (au sens de $\star$) à droite par $[c_u^{-1}]$.

Il faut mettre une topologie sur E : nous allons déclarer ouvert tout ensemble qui est une union de parties de la forme U_α (pour divers choix de x, de U, de F, de α). Nous montrerons plus bas que c'est bien une topologie, pour l'instant admettons-le. Alors la description de $p^{-1}(U)$ ci-dessus montre que p est continue (tout point de X ayant un voisinage tel que U). De plus, la relation $p(U_\alpha) = U$ montre que p est une application ouverte (tout ouvert de E étant une union d'ensembles de la forme U_α). En particulier, dans les notations ci-dessus, on constate que p réalise un homéomorphisme $U_\alpha \longrightarrow U$, et finalement, p est un revêtement de X.

Vérifions donc que notre topologie sur E en est bien une, c'est-à-dire que l'intersection de deux ouverts est encore un ouvert (c'est visiblement la seule chose qui n'est pas évidente). On suppose donc que des choix de x, U, F et α conduisent à l'ouvert U_α, et que y, V, G, β mènent à V_β, et on doit vérifier que $U_\alpha \cap V_\beta$ est ouvert ; le cas où $U_\alpha \cap V_\beta = \emptyset$ étant trivial, on suppose qu'il existe $z \in U \cap V$ avec $\alpha\star\lambda = \beta\star\mu \in U_\alpha \cap V_\beta$, où λ est la classe d'un chemin de x à z dans U, et μ est la classe d'un chemin de y à z dans V. Rappelons que α resp. β est la classe d'un chemin de x_0 à x resp. y.

Puisque X est localement contractile, on peut choisir $W \subset U \cap V$, un ouvert de X qui se rétracte sur z. On va montrer que $W_\gamma \subset U_\alpha \cap V_\beta$, où $\gamma = \alpha\star\lambda = \beta\star\mu$. Montrons d'abord que $W_\gamma \subset U_\alpha$, et l'autre inclusion sera valable par un argument symétrique. On reprend les notations ci-dessus, de sorte que pour tout $u \in U$ on a le chemin c_u, et $\varphi_\alpha\colon U \longrightarrow U_\alpha$ est définie par $\varphi_\alpha(u) = \alpha\star[c_u]$. Faisons le même travail avec W : ayant choisi une rétraction sur z, on a un chemin c'_w de z à w, pour tout $w \in W$, et une application $\psi_\gamma\colon W \longrightarrow W_\gamma$ définie par $\psi_\gamma(w) = \gamma\star[c'_w]$. La remarque fondamentale est que U est simplement connexe (puisqu'il se rétracte sur un point). Donc les chemins c_w et $\lambda\star c'_w$, qui joignent x à w dans U, sont homotopes rel $\{0, 1\}$. D'où

$$\varphi_\alpha(w) = \alpha\star[c_w] = \alpha\star\lambda\star[c'_w] = \gamma\star[c'_w] = \psi_\gamma(w)\,.$$

En d'autres termes, la restriction de φ_α à W n'est autre que ψ_γ. Il est alors clair que $W_\gamma = \psi_\gamma(W) \subset \varphi_\alpha(U) = U_\alpha$. De même, on montre que $W_\gamma \subset V_\beta$. On a bien une topologie.

Reste à voir que E est simplement connexe. D'abord une observation. Prenons $e \in E$, et choisissons un chemin c de x_0 à $c(1)$ dans X, tel que $e = [c]$ (un tel c existe par définition même de E). Soit alors

$$c_t \colon [0,1] \longrightarrow X$$

défini par $c_t(s) = c(ts)$. On a donc $c_1 = c$, et c_0 est le chemin constant en x_0. On regarde maintenant

$$\widetilde{c} \colon [0,1] \longrightarrow E$$

défini par $\widetilde{c}(t) = [c_t]$. On a alors $p \circ \widetilde{c} = c$. Il faut montrer que $\widetilde{c}$ est continu, ce qu'on vous laisse en exercice, avec les indications suivantes : pour étudier la continuité en $t \in [0,1]$, on pose $\alpha = \widetilde{c}(t) = [c_t]$, puis $x = p(\alpha) = c(t)$, ensuite on prend U et U_α comme ci-dessus, et on montre que, sur un voisinage de t, on a $\widetilde{c} = \psi_\alpha \circ c$; cette dernière égalité provient du fait que U est simplement connexe, donc tout chemin de x à $c(s)$ est homotope à la restriction de c lui-même.

Ayant établi ceci, appelons e_0 le chemin constant en x_0 dans X, et voyons-le comme un élément de $p^{-1}(x_0) \subset E$; alors $\widetilde{c}$ est un chemin de e_0 à e, et on constate déjà que E est connexe par arcs.

Mais de plus, nous avons décrit les relèvements de chemins dans X. En effet, si on part d'un chemin c, on pose $e = [c] \in E$, et le relèvement de c à un chemin dans E qui démarre en e_0 est exactement le $\widetilde{c}$ que l'on vient de voir ; il se termine en e. En particulier, observons l'action de monodromie de $\pi_1(X, x_0)$ sur $p^{-1}(x_0)$. Si $\gamma = [c] \in \pi_1(X, x_0)$, alors $e_0 \cdot \gamma = \gamma$, une égalité surprenante, mais n'oublions pas que, les notations étant ce qu'elles sont, l'ensemble $p^{-1}(x_0)$ est aussi l'ensemble $\pi_1(X, x_0)$...

On conclut que le stabilisateur de e_0 pour l'action de monodromie est trivial. Mais ce stabilisateur est $p_*(\pi_1(E, e_0))$ par la proposition 4.3.1, et p_* est injectif par le lemme 5.1.1, donc $\pi_1(E, e_0)$ est trivial. L'espace topologique E est bien simplement connexe. □

Remarque 5.2.3. L'espace E est alors unique, à isomorphisme de revêtement près, en conséquence de la proposition 5.1.4. On dit que E est « le » *revêtement universel* de X.

Exemple 5.2.4. Le revêtement universel de S^1 est $\mathbf{R}$. Celui de $\mathbf{R}P^n$ est S^n pour $n \geq 2$, puisque nous avons que $\pi_1(S^n) = 1$ pour $n \geq 2$. Plus loin dans le chapitre, nous verrons le revêtement universel de l'espace en forme de 8 (figure 5.5).

Remarque 5.2.5. Si vous avez préféré ne pas lire les détails de la démonstration du théorème, ce n'est pas si grave. En pratique, on dispose très souvent d'un revêtement universel « évident », pour les espaces X qui nous intéressent. Plutôt que de comprendre la preuve, ou d'admettre le théorème, on peut tout simplement décider d'ajouter, dans le reste du chapitre, à côté de l'hypothèse « X est connexe et localement contractile », l'hypothèse « X possède un revêtement universel ». Dans tous les exemples concrets, ça ne changera rien.

5.3. La correspondance galoisienne

Proposition 5.3.1. *Soit E simplement connexe et localement contractile, soit G un groupe qui agit discrètement sur E, et soit $X = E/G$. L'application quotient est notée $p\colon E \longrightarrow X$, et $\tau\colon G \longrightarrow \pi_1(X, x_0)$ désigne l'isomorphisme du théorème 4.4.6.*

Soit maintenant H un sous-groupe arbitraire de G, et notons

$$q_H\colon E/H \longrightarrow E/G = X$$

l'application naturelle, qui est un revêtement. Alors le sous-groupe $\tau(H)$ est dans la classe $\mathscr{C}(q_H)$.

Puisque tout sous-groupe K de $\pi_1(X, x_0)$ est de la forme $\tau(H)$ pour $H = \tau^{-1}(K)$, cette proposition affirme que chaque classe de conjugaison est de la forme $\mathscr{C}(q)$ pour un revêtement q, à savoir $q = q_H$ comme ci-dessus. Après la démonstration, nous mettrons ça en forme.

Démonstration. On note $p_H\colon E \longrightarrow E/H$ et $q_H\colon E/H \longrightarrow E/G = X$, de sorte que $q_H \circ p_H = p$. Soit $\tau_G\colon G \longrightarrow \pi_1(X, x_0)$ l'isomorphisme du théorème 4.4.6 appliqué à p (c'est-à-dire que $\tau_G = \tau$ dans les notations de la proposition), et soit $\tau_H\colon H \longrightarrow \pi_1(E/H, y_0)$ l'isomorphisme obtenu en appliquant le même théorème à p_H. Ici on a choisi un point $y_0 \in E/H$ tel que $p_H(y_0) = x_0$. Nous affirmons que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "\tau_H"] \arrow[d] & \pi_1(E/H, y_0) \arrow[d, "(q_H)_*"] \\ G \arrow[r, "\tau_G"] & \pi_1(X, x_0) \end{tikzcd}$$

C'est tout simple. Prenons $e_0 \in E$ tel que $p_H(e_0) = y_0$, et donc $p(e_0) = x_0$. Si $h \in H$, soit c un chemin dans E menant de e_0 à $h(e_0)$. Alors $\tau_G(h)$ est $[p \circ c]$, et $\tau_H(h) = [p_H \circ c]$. Puisque $q_H \circ p_H = p$, le résultat est une conséquence des définitions.

Finalement $\tau_G(H) = (q_H)_*(\tau_H(H)) = (q_H)_*(\pi_1(E/H, y_0))$, et donc par définition, $\tau_G(H)$ est un groupe de la classe $\mathscr{C}(q_H)$. $\square$

Théorème 5.3.2 (correspondance galoisienne). *Soit X un espace topologique connexe et localement contractile, et soit $x_0 \in X$. Alors il existe une bijection entre les ensembles*

$$A = \{\text{revêtements connexes de } X \text{ à isomorphisme près}\}$$

et

$$B = \{\text{classes de conjugaison de sous-groupes de } \pi_1(X, x_0)\}\,.$$

De plus, si $p\colon E \longrightarrow X$ est le revêtement universel de X, alors ces ensembles sont aussi en bijection avec

$$C = \{\text{classes de conjugaison de sous-groupes de } Gal(p)\}\,.$$

Remarquons que la démonstration va aussi s'attacher à donner des bijections *explicites* pour chaque paire d'ensembles. Ajoutons aussi que l'exercice 36 va donner une caractérisations des revêtements qui correspondent aux sous-groupes distingués (par analogie avec la théorie de Galois, on s'attend à quelque chose dans cette direction).

Démonstration. Soit $G = Gal(p)$. On va faire la démonstration en remplaçant X par E/G, ce qui est légitime par le théorème 4.4.6. On considère le diagramme

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "\mathscr{C}"] & & B \\ & C \arrow[ul, "\alpha"] \arrow[ur, "\tau"'] & \end{tikzcd}$$

Ici, on fait deux petits abus de notation. Tout d'abord, on écrit $\mathscr{C}$ pour l'application induite par $\mathscr{C}$, et c'est la proposition 5.1.4 qui nous assure non seulement que ça a un sens, mais aussi que $\mathscr{C}$ est injective. La proposition 5.3.1 affirme qu'elle est surjective, donc finalement $\mathscr{C}$ est une bijection.

Ensuite, on écrit τ pour l'application $C \longrightarrow B$ induite par l'isomorphisme de groupes $\tau\colon G \longrightarrow \pi_1(X, x_0)$. Évidemment, cette application est une bijection entre B et C.

L'application α, quant à elle, associe à $H \subset G$ le revêtement $q_H\colon E/H \longrightarrow E/G$. Il faut vérifier que α est bien définie : en clair, si on remplace H par $K = gHg^{-1}$ pour un $g \in G$, il faut vérifier que l'on obtient le même élément de A, c'est à dire le même revêtement à isomorphisme près. Or si on voit g comme une application $E \longrightarrow E$, alors pour tout $h \in H$ et $e \in E$ on a $g(h \cdot e) = k \cdot g(e)$ pour un $k \in K$, à savoir $k = ghg^{-1}$. Donc g induit un homéomorphisme $E/H \longrightarrow$

E/K, d'inverse induit par g^{-1}. La compatibilité avec p est claire, donc c'est bien un isomorphisme de revêtements entre q_H et q_K. Finalement, α est bien définie.

C'est encore la proposition 5.3.1 qui nous dit que $\mathscr{C} \circ \alpha = \tau$. On en déduit que $\alpha = \mathscr{C}^{-1} \circ \tau$ est également une bijection. □

Voyons des exemples. Les espaces considérés sont tous localement contractiles, donc on ne va pas le préciser à chaque fois.

Commençons par le plus évident.

Exemple 5.3.3. Si X est simplement connexe, alors le seul revêtement $p\colon E \longrightarrow X$ avec E connexe est isomorphe à l'identité $X \longrightarrow X$, c'est-à-dire que p est un homéomorphisme. En effet $\pi_1(X) = 1$ possède un seul sous-groupe ! En d'autres termes, on a (encore) retrouvé le corollaire 4.3.2.

Exemple 5.3.4. Le groupe $\pi_1(S^1) \cong \mathbf{Z}$ possède un sous-groupe $n\mathbf{Z}$ pour chaque $n \in \mathbf{N}$ et aucun autre (par contre $n\mathbf{Z} = -n\mathbf{Z}$), et ce sous-groupe est d'indice fini pour $n > 0$. Le revêtement correspondant est l'application $p = p_n\colon S^1 \longrightarrow S^1$ telle que $p_n(z) = z^n$ pour $n > 0$. Ici on utilise le calcul de l'exemple 4.4.7 pour vérifier que $p_*(\pi_1(S^1))$ est bien le sous-groupe $n\mathbf{Z}$.

Soit maintenant $p\colon E \longrightarrow S^1$ un revêtement quelconque. Si $\mathscr{C}(p)$ ne contient pas des groupes d'indice fini, c'est que $\mathscr{C}(p)$ est la classe du groupe trivial. Donc p est le le revêtement universel $\mathbf{R} \longrightarrow S^1$ (c'est le cas $n = 0$, si on veut). On a donc classifié tous les revêtements du cercle.

La classification prévoit que p_{-n} est isomorphe à p_n ; et en effet, la conjugaison complexe donne l'isomorphisme.

Exemple 5.3.5. Une conséquence de la classification qui mérite d'être remarquée est la suivante : s'il existe une équivalence d'homotopie entre X et Y, alors leurs revêtements sont en bijection.

Ainsi, $\mathbf{C}^\times$ et le ruban de Moebius M ont le type d'homotopie de S^1, donc leurs revêtements sont décrits essentiellement comme dans l'exemple précédent. Attention cependant : pour S^1, « l'espace total » d'un revêtement connexe, quand il n'est pas $\mathbf{R}$, est homéomorphe à S^1 lui-même ; cette propriété reste vraie pour $\mathbf{C}^*$, mais pas pour M (on a déjà vu que le revêtement à deux feuillets connexe était un cylindre, qui est une variété orientable contrairement à M).

5.4. Les revêtements du huit

Pour conclure le chapitre, nous allons examiner un exemple sous toutes les coutures. Ici, on ne cherche pas la rigueur absolue, l'objectif étant plutôt de se forger une intuition sur les concepts introduits dans ce chapitre et le précédent. On vous conseille de parcourir d'abord la digression que voici rapidement, pour

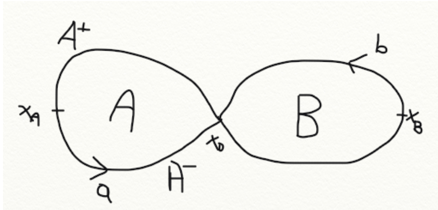


Figure 5.1. L'espace X avec ses trois points x_0, x_A, x_B, les deux cercles A et B, les deux demi-cercles A^+ et A^-, et les deux générateurs a et b de $\pi_1(X, x_0)$

vous faire une idée. Dans les exercices à la fin du chapitre, on vous demande de compléter les démonstrations. (La suite du livre ne repose pas sur ces exemples, mais les deux lemmes introduits seront utilisés.)

Nous allons explorer les revêtements de l'espace X en forme de 8, c'est-à-dire formé de deux cercles A et B tangents en un point x_0 qui va servir de point base. Sur la figure 5.1, on a également placé deux points x_A et x_B. Rappelons ce que l'on sait sur le groupe fondamental de X. En reprenant l'exemple 3.5.2, et en simplifiant très légèrement les notations, nous savons qu'il existe deux éléments $a, b \in \pi_1 = \pi_1(X, x_0)$ qui engendrent ce groupe, dans le sens où tout élément de π_1 est un mot en a et b, type $a^4b^2a^{-1}b^7$. De plus, a et b sont représentés par les lacets que l'on a indiqué sur la figure, qui font le tour de A et B respectivement. Nous avons annoncé, sans pouvoir le démontrer pour l'instant, qu'il n'y a « pas de relations » entre a et b (nous n'allons pas nous servir de ça dans les arguments ci-dessous, évidemment).

Soit $p \colon E \longrightarrow X$ un revêtement de X avec E connexe (ici X est localement connexe, donc E aussi). Que dire de E ? C'est là que le corollaire 4.3.2 va montrer toute son utilité : on va prendre des parties simplement connexes de X et regarder la restriction de p au-dessus. On se sert des deux lemmes suivants, dont le premier constituait l'exercice 28.

Lemme 5.4.1. *Soit $p \colon E \longrightarrow X$ un revêtement, où X est un espace topologique quelconque. Soit $Y \subset X$. Alors l'application $p^{-1}(Y) \longrightarrow Y$ obtenue par restriction est un revêtement de Y.*

Notez qu'il n'y a pas d'hypothèse sur Y, qui n'a pas besoin d'être ouvert ou fermé par exemple. Le deuxième outil dont on va se servir est :

Lemme 5.4.2. *Soit X connexe et localement connexe, et soit $p \colon Y \longrightarrow X$ un revêtement. Soit $Y = \coprod_{i \in I} Y_i$ la décomposition de Y en composantes connexes. Alors la restriction*

$$p \colon Y_i \longrightarrow X \,,$$

pour chaque $i \in I$, est un revêtement.

Si vous le souhaitez, vous pouvez ignorer la démonstration en première lecture, tant l'énoncé est intuitif, et poursuivre vers les exemples concrets. Ceci dit, ce lemme serait faux sans supposer X connexe (cherchez un contre-exemple).

Démonstration. Prenons $x \in X$, et choisissons un ouvert U avec $x \in U$, qui est à la fois connexe par arcs et trivial pour p. On a donc $p^{-1}(U) = \coprod_\alpha U_\alpha$, avec chaque U_α homéomorphe à U, et donc connexe par arcs. Pour un $i \in I$ et un α donnés, si $Y_i \cap U_\alpha \neq \emptyset$, alors $U_\alpha \subset Y_i$. Ainsi l'ensemble

$$Y_i^U := Y_i \cap p^{-1}(U)$$

est la réunion de certains des U_α.

Maintenant, observons que $x \in p(Y_i) \iff Y_i^U \neq \emptyset$, ce qui est désormais clair. Ainsi, si $x \in p(Y_i)$, alors $p(Y_i^U) = U$, et cette remarque nous garantit que pour tout i, l'ensemble $p(Y_i)$ est ouvert dans X. Mais on note également que si $Y_i^U = \emptyset$, alors $U \cap p(Y_i) = \emptyset$, ou encore $U \subset X - p(Y_i)$. Cette fois-ci, on conclut que $X - p(Y_i)$ est ouvert dans X, pour chaque i.

Finalement, on a montré que $p(Y_i)$ était à la fois ouvert et fermé dans X qui est connexe, donc $p(Y_i) = X$ car cet ensemble est non-vide. Le U ci-dessus est alors trivial pour la restriction de p à Y_i, qui est bien un revêtement de X. $\square$

Revenons à notre exemple, et commençons modestement par regarder $p^{-1}(x_0)$: c'est un ensemble discret (c'est-à-dire que toutes ses parties sont ouvertes), par définition d'un revêtement, et les points de $p^{-1}(x_0)$ vont être appelés les *sommets* de E. Ensuite, regardons $A' = A - \{x_0\}$, qui est une partie de X homéomorphe à $]0, 1[$ et donc simplement connexe. Le premier lemme s'applique (avec A' dans le rôle de Y), donc la restriction $p^{-1}(A') \longrightarrow A'$ est un revêtement ; par le deuxième lemme, la restriction de p à une composante connexe C de $p^{-1}(A')$ donne un revêtement $p_C \colon C \longrightarrow A'$; et enfin, par le corollaire 4.3.2, on conclut finalement que p_C est un homéomorphisme. En résumé, *les composantes connexes de* $p^{-1}(A')$ *sont homéomorphes à* A' *et donc à* $]0, 1[$. On va refaire ce petit raisonnement sans cesse avec d'autres parties simplement connexes de X, en lieu et place de A'.

Un peu de vocabulaire : les composantes connexes de $p^{-1}(A')$ seront appelés les *arêtes de type* a. Notons que chacune de ces arêtes contient un unique point de $p^{-1}(x_A)$, que nous appellerons « le milieu de l'arête » pour faire court. De la même manière, les composantes connexes de $p^{-1}(B')$ où $B' = B - \{x_0\}$ seront appelées les *arêtes de type* b, elles sont homéomorphes à $]0, 1[$, et chacune possède un « milieu » qui est dans $p^{-1}(x_B)$. Nous voyons déjà que E est formé de sommets et d'arêtes, et on commence à voir qu'il s'agit d'un graphe, dont les arêtes sont de deux « types ». Soyons plus précis, et montrons que chaque arête possède un point de départ et un point d'arrivée, ainsi qu'une certaine « orientation ». En effet,

Figure 5.2. *Le graphe de Cayley du groupe (additif) $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$, pour les générateurs $\alpha = (1,0)$ et $\beta = (0,1)$. Les types des flèches sont donnés par le style de trait (pointillé ou plein). Ce dessin peut être interprété comme un revêtement de X.*

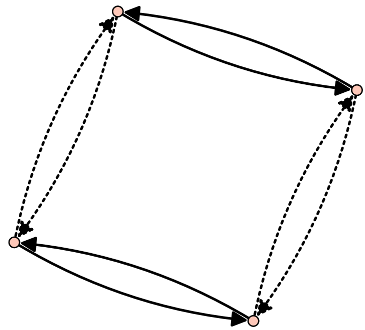


Figure 5.3. *Le graphe de Cayley du groupe symétrique S_3, pour $\alpha = (1,2,3)$ (pointillé) et $\beta = (1,2)$ (trait plein).*

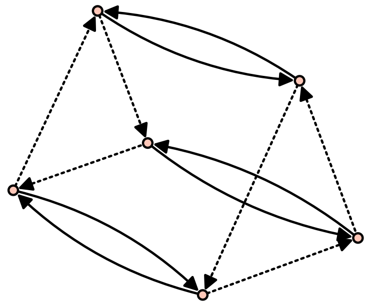
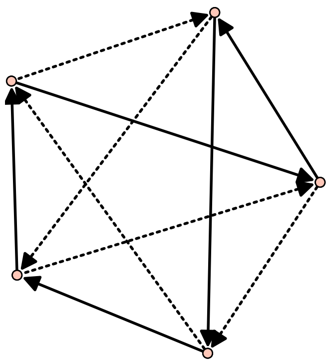


Figure 5.4. *Le graphe de Cayley d'un groupe cyclique d'ordre 5, engendré par β (trait plein), avec $\alpha = \beta^2$ (pointillé).*



Trois exemples de graphes orientés, avec des arêtes de deux types différents (ici pointillé ou trait plein, dans le texte « type a » ou « type b »). Ce sont des exemples de revêtements de X : les sommets sont envoyés sur x_0, les arêtes en pointillé sont envoyées sur le cercle A et celles en trait plein sur B.

utilisons encore la lettre a, par abus, pour désigner un lacet $a\colon [0,1] \longrightarrow X$ dont la classe dans π_1 est celle que nous avons appelée a. Il existe alors, pour chaque point $m \in p^{-1}(x_A)$ au milieu d'une arête, un unique relèvement $\widetilde{a}\colon [0,1] \longrightarrow E$ tel que $\widetilde{a}(\frac{1}{2}) = m$. (Techniquement, puisque nous ajustons la valeur de $\widetilde{a}(\frac{1}{2})$ et non pas $\widetilde{a}(0)$ comme on le fait souvent avec les chemins, il faut invoquer le théorème du relèvement 4.2.5 avec $Y = [0,1]$ et $y_0 = \frac{1}{2}$). L'image de $]0,1[$ par $\widetilde{a}$ est une arête de type a, et c'est même l'unique arête de ce type qui contient m. Alors $\widetilde{a}(0)$ est appelé le *point de départ* de l'arête, de même que $\widetilde{a}(1)$ est appelé son *point d'arrivée*. Pour les besoins de l'intuition, on peut penser que chaque arête est ornée d'une flèche qui va du point de départ vers celui d'arrivée. On procède de la même façon avec les arêtes de type b.

On peut tout de suite contempler les figures 5.2 et suivantes pour des exemples de tels graphes : orientés, avec deux « types » d'arêtes, que l'on peut représenter avec des couleurs différentes. Les figures 4.1 et 4.2, vues au début du chapitre, illustrent également ceci.

Voilà qui complète la construction d'un graphe à partir d'un revêtement. Est-ce que, réciproquement, en présence d'un graphe E dont les arêtes sont orientées, et sont de deux types a ou b, on peut construire un revêtement de X ? On peut définir $p\colon E \longrightarrow X$ avec $p(s) = x_0$ si s est un sommet, et de sorte que si C est une arête de type a resp. b, alors p est un homéomorphisme $C \longrightarrow A'$ resp. $C \longrightarrow B'$. Il faut alors vérifier que p est un revêtement. En particulier, puisque $x_0 \in X$ est entouré (quand on le regarde à la loupe) de quatre arêtes, deux de type a dont une entrante et une sortante, et deux de type b dont une entrante et une sortante, la même chose doit être vraie dans le graphe E. En réalité, c'est la seule condition à vérifier. On peut montrer le résultat suivant, dont on vous confie la démonstration :

Proposition 5.4.3. *Considérons*

1. *les revêtements de X,*
2. *les graphes orientés, dont les arêtes sont de deux types a ou b, tels que chaque sommet est entouré de quatre arêtes comme ci-dessus (deux de type a dont une entrante et une sortante, et deux de type b dont une entrante et une sortante).*

Alors il y a une bijection entre l'ensemble des objets de type (1) à isomorphisme près, et l'ensemble des objets de type (2) à isomorphisme près.

Pour produire des exemples de revêtements du 8, il suffit donc de dessiner des graphes orientés avec la propriété donnée ci-dessus. On peut déjà s'amuser à en trouver au pifomètre. Mais voici également une façon d'en produire beaucoup, de manière automatique. Prenons un groupe G et deux éléments $\alpha, \beta \in G$. Le *graphe de Cayley* de (G, α, β) a pour sommets l'ensemble G lui-même, et pour chaque $g \in G$ on lui donne une arête de type a orientée de g à $g\alpha$, ainsi qu'une arête de type b orientée de g à $g\beta$. Ainsi, chaque sommet $g \in G$ est au départ de deux flèches (qui arrivent en $g\alpha$ et $g\beta$) et à l'arrivée de deux flèches (qui partent de $g\alpha^{-1}$ et $g\beta^{-1}$). Les figures ci-dessus vous donnent trois exemples de graphes de Cayley, qui sont autant d'exemples (obtenus bien facilement) de revêtements de X.

Ces graphes sont très pratiques pour visualiser et comprendre l'action de monodromie. Allez voir toutes les définitions, et vous constaterez ceci : si $g \in G$ est un sommet dans le graphe de Cayley de (G, α, β), alors l'action de $a \in \pi_1(X, x_0)$ sur g par monodromie est donnée par $g \cdot a = g\alpha$, tout simplement, et de même $g \cdot b = g\beta$. L'action d'un mot $m \in \pi_1$ se lit immédiatement en suivant les flèches dans le graphe, et elle nous mène de $g \in G$ à $gm(\alpha, \beta)$ où $m(\alpha, \beta)$ désigne le mot obtenu en remplaçant les a et les b, dans le mot m, par des α et β.

De même, la proposition 4.3.1 nous affirme que le stabilisateur de $g \in G$ par l'action de monodromie est $p_*(\pi_1(E, g)) \subset \pi_1(X, x_0)$. Mais avec les remarques ci-dessus, on voit que $gm(\alpha, \beta) = g \iff m(\alpha, \beta) = 1$. Autrement dit, nous avons une description du sous-groupe $p_*(\pi_1(E, g))$ (lequel a joué le rôle central dans ce chapitre) : c'est l'ensemble des mots m tels que $m(\alpha, \beta) = 1$, mots qu'on appelle souvent simplement les *relations entre α et β*. Par exemple, avec $G = S_3$ et $\alpha = (1, 2, 3)$, $\beta = (1, 2)$ (figure 5.3), on a $\alpha^3 = 1$ et $\beta\alpha\beta\alpha = 1$ (entre autres !), donc a^3 et $baba$ sont dans le sous-groupe $p_*(\pi_1(E, g))$.

Considérons enfin l'application $\varphi \colon \pi_1 \longrightarrow G$ donnée par $\gamma \mapsto 1 \cdot \gamma$ (ici $1 \in G$ est l'élément neutre). Vous montrerez qu'il s'agit là d'un homomorphisme de groupes (procéder comme à la fin de la démonstration du théorème 4.4.6 ; utiliser le fait que G agit à gauche sur son propre graphe de Cayley). On voit de suite que le noyau de φ est le stabilisateur de $1 \in G$ pour la monodromie, donc c'est le sous-groupe décrit ci-dessus – qui se trouve être distingué. Avec un peu de travail, on en déduit :

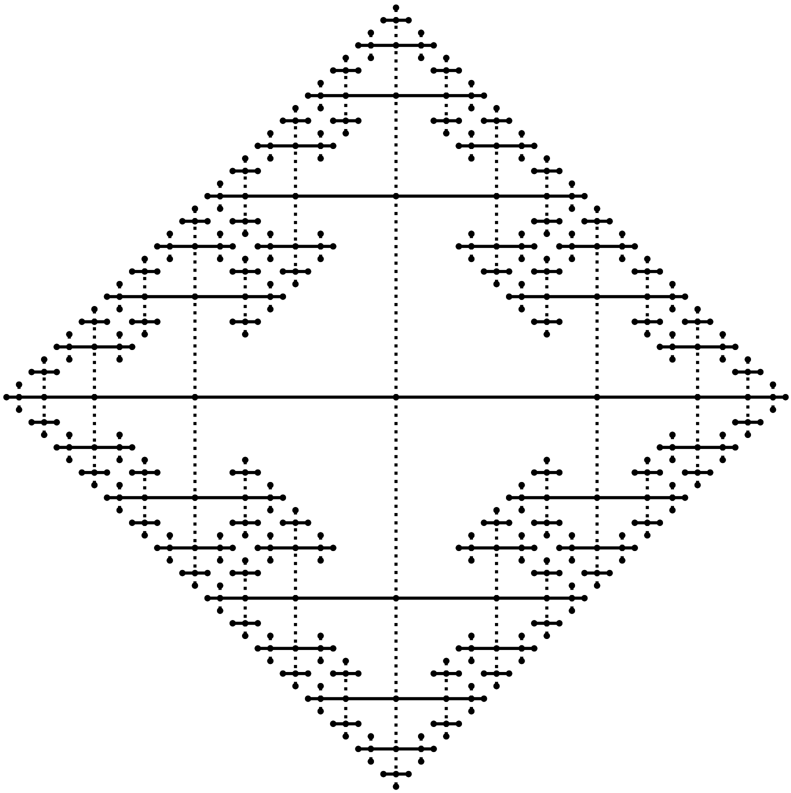
Proposition 5.4.4. *Soit $p \colon E \longrightarrow X$ le revêtement obtenu en considérant le graphe de Cayley de (G, α, β). Supposons que α et β engendrent G. Alors on a un isomorphisme*

$$\pi_1(X, x_0)/p_*(\pi_1(E, 1)) \cong G$$

qui envoie a sur α et b sur β. De plus, G est également isomorphe à $Gal(p)$. Enfin, tout revêtement tel que $p_*(\pi_1(E, 1))$ est distingué dans π_1 est obtenu de la sorte, pour un G bien choisi.

Ce phénomène est considérablement élucidé dans les exercices, avec X remplacé par un espace quelconque.

Ces considérations ne sont pas limitées aux graphes finis. Considérez la figure 5.5. On y voit une portion d'un graphe dont il faut imaginer le reste. Dans le §6.7, nous donnerons la définition du groupe G dont on dit qu'il est « libre sur α et β », et certains lecteurs doivent déjà le connaître. Le graphe en question est



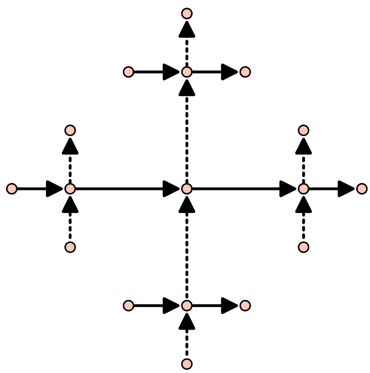


Figure 5.5. Ci-dessus : un graphe orienté (une partie seulement est dessinée) qui définit un revêtement simplement connexe de X. Les flèches n'ont pas été dessinées par manque de place. Ci-contre : un zoom autour d'un sommet quelconque.

alors le graphe de Cayley de (G, α, β) (et c'est essentiellement la seule façon de le définir de manière rigoureuse). Soit $p\colon E \longrightarrow X$ le revêtement correspondant. Le groupe $p_*(\pi_1(E, 1))$ est le groupe des mots en a et b qui donnent des relations entre α et β, et lorsqu'on comprend un peu le groupe G, il est clair qu'il n'y a aucune relation de la sorte : en d'autres termes $p_*(\pi_1(E, 1))$ est le sous-groupe trivial. D'après la proposition, on en déduit que $\pi_1(X, x_0)$ est isomorphe à ce groupe libre G.

On peut même se passer de la proposition, ici : d'après le lemme 5.1.1, on sait que p_* est injectif lorsque p est un revêtement. Ainsi $\pi_1(E, 1)$ est trivial, et E est simplement connexe. On retrouve que $G \cong Gal(p) \cong \pi_1(X, x_0)$ d'après le théorème fondamental 4.4.6 sur les revêtements simplement connexes, puisque E/G s'identifie bien à X (c'est un graphe avec un seul sommet !).

Nous avons donc calculé le groupe fondamental du fameux espace en forme de huit, en ayant admis au minimum les résultats suivants : l'existence et les propriétés de base du groupe libre, et le fait que l'on puisse définir rigoureusement un revêtement de X à partir d'un graphe orienté. Le groupe libre est étudié au chapitre suivant, et dans les exercices ci-dessous on vous donne des indications pour le reste.

Le théorème général de Van Kampen, dans le chapitre 6, donne un argument complet pour le calcul de ce groupe fondamental, et plus conceptuel.

5.5. Exercices

Exercice 36 (revêtements réguliers). Dans cet exercice, nous allons étudier les revêtements qui correspondent aux sous-groupes distingués du groupe fondamental. On dit qu'ils sont *réguliers* ou *galoisiens*. Pour le résoudre il faut être un peu à l'aise avec les actions de groupes, et ceci dépend fortement de ce que vous avez vu en L3. Certains étudiants pourraient préférer attendre d'avoir lu la partie sur les « G-ensembles », dans le chapitre suivant, avant d'attaquer l'exercice.

Soit donc X connexe et localement contractile, et $p\colon E \longrightarrow X$ un revêtement avec E connexe. On choisit $x_0 \in X$, on écrit $\pi = \pi_1(X, x_0)$ et $H = p_*(\pi_1(E, e))$ pour un $e \in p^{-1}(x_0)$ (donc H est un groupe de $\mathscr{C}(p)$). Enfin, on note $H_0 = \bigcap_{g\in\pi} gHg^{-1}$.

1. Montrer que H_0 est le plus grand sous-groupe de H qui est distingué dans π, puis que l'action de monodromie de π sur $p^{-1}(x_0)$ se factorise par $\overline{\pi} := \pi/H_0$.

2. Montrer que le groupe des permutations de $p^{-1}(x_0)$ qui commutent avec l'action de monodromie s'identifie à $Gal(p)$.

   Indications : puisque l'action de monodromie est transitive, une telle permutation $\varphi\colon p^{-1}(x_0) \longrightarrow p^{-1}(x_0)$ *est entièrement déterminée par* $\varphi(e)$. *On commencera par montrer que l'on peut écrire* $\varphi(e) = e \cdot g$ *où* $gHg^{-1} = H$. *Appliquer alors le théorème du relèvement 4.2.5.*

3. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

   (a) H est distingué dans π ;

   (b) $H = H_0$;

   (c) le groupe $\overline{\pi}$ agit librement sur $p^{-1}(x_0)$;

   (d) le groupe $Gal(p)$ agit transitivement sur $p^{-1}(x_0)$.

   Montrer que, quand ces conditions sont remplies, les groupes $Gal(p)$ et $\overline{\pi}$ sont isomorphes.

   Si de plus p est un revêtement de degré fini n (c'est-à-dire si $p^{-1}(x_0)$ est un ensemble fini de cardinal n), montrer que les conditions précédentes sont également équivalentes à :

   (e) $\overline{\pi}$ est d'ordre n ;

   (f) $Gal(p)$ est d'ordre n ;

   (g) $\overline{\pi}$ et $Gal(p)$ sont isomorphes.

   Indications : dans le premier groupe de conditions, tout est élémentaire sauf (c) $\Longrightarrow$ *(d). Voici des conseils, qui vont également rendre plus claire la condition (g).*

   Puisque $\overline{\pi}$ *agit transitivement, la condition (c) signifie que* $p^{-1}(x_0)$ *peut s'identifier à* $\overline{\pi}$ *lui-même avec son action par multiplication à droite ; de même, puisque* $Gal(p)$ *agit librement, la condition (d) signifie que* $p^{-1}(x_0)$ *s'identifie à* $Gal(p)$ *avec son action par multiplication à gauche. On sera donc bien avisé de commencer par le petit lemme suivant : soit* G *un groupe qui agit sur lui-même par multiplication (à gauche ou à droite), alors le groupe des permutations qui commutent avec cette action est isomorphe à* G. *Et bien sûr on a aussi la question précédente.*

Exercice 37. Démontrer la proposition 5.4.3. On commencera par donner une définition (combinatoire) de ce qu'est un graphe orienté Γ – essentiellement un ensemble de sommets et un ensemble d'arêtes, qui ont chacune un début et une fin. Puis on donnera la définition d'un espace topologique $|\Gamma|$ associé à Γ, et pour ceci, le plus naturel reste d'utiliser la topologie quotient (pour exprimer $|\Gamma|$ comme une union de copies de l'intervalle $[0, 1]$ sur lesquels on fait des recollements).

Quand les définitions sont bien posées, l'esquisse de démonstration qui est donnée ci-dessus dans le chapitre devient presque une démontration complète. Mais ceux d'entre vous qui voudront rédiger tous les détails vont être surpris par la longueur des arguments.

Exercice 38. Montrer la proposition 5.4.4. Il est essentiel d'avoir résolu l'exercice 36 d'abord !

Chapitre 6

Catégories et applications

Dans ce chapitre nous introduisons d'abord le vocabulaire des *catégories*. On s'en sert un peu tout le temps en mathématiques, et vous pouvez être sûrs de revoir ça dans la suite de vos études.

À l'aide de ce langage, on énonce la classification des revêtements d'un espace donné de la « bonne façon », comme une équivalence entre deux catégories. Ensuite, en guise d'application, on démontre le théorème de Van Kampen, qui décrit le groupe fondamental d'un espace X qui est l'union de deux ouverts U et V tels que $U \cap V$ est connexe par arcs. Il existe des démonstrations plus « directes », mais elles sont presque toujours incomplètes, alors qu'avec l'approche par les revêtements et les catégories, on arrive à un argument très convaincant.

Pour finir, comme l'énoncé de Van Kampen est un peu mystérieux d'un point de vue algébrique, on donne quelques compléments sur les groupes. En particulier, on va enfin décrire le « groupe libre sur deux générateurs » qui a été évoqué plusieurs fois.

6.1. Catégories

Définition 6.1.1. Une *catégorie* $\mathscr{C}$ est constituée de :

1. une collection $ob(\mathscr{C})$ d'objets. On s'autorisera à écrire $A \in ob(\mathscr{C})$ pour dire que A est l'un des objets de $\mathscr{C}$, alors même que $ob(\mathscr{C})$ n'est pas forcément un ensemble (donc le symbole $\in$, en toute rigueur, ne devrait pas être employé...)
2. une collection d'ensembles $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B)$, pour chaque $A \in ob(\mathscr{C}), B \in ob(\mathscr{C})$. On s'autorisera à écrire $f : A \longrightarrow B$ au lieu de $f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B)$, pour des raisons qui vont apparaître très vite.

On suppose de plus qu'on a des applications

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,B) \times \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(B,C) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,C)\,;$$

l'image de $(f,g) \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,B) \times \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(B,C)$ est notée $g \circ f$. Les propriétés suivantes doivent être satisfaites :

- (associativité) $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.
- (existence des identités) pour chaque $A \in ob(\mathscr{C})$, il existe un élément $id_A \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,A)$ tel que $f \circ id_A = f$, $id_A \circ g = g$, pour tout $f : A \longrightarrow B$ et $g : B \longrightarrow A$.

Les éléments des ensembles $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,B)$ seront appelés les *flèches* de $\mathscr{C}$, ou encore les *morphismes* de $\mathscr{C}$.

Exemple 6.1.2. La catégorie des ensembles. On prend $ob(\mathscr{C})$ = tous les ensembles (donc $ob(\mathscr{C})$ n'est pas un ensemble lui-même, c'est bien connu !), et $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,B)$ = l'ensemble des toutes les fonctions de A vers B. L'opération $\circ$ est la composition « normale » des fonctions. Les « identités » sont également les fonctions identités « normales », c'est-à-dire $x \mapsto x$. Dans la suite, à chaque fois que la composition, ou les identités, sont évidentes, on ne les précisera pas.

Exemple 6.1.3. La catégorie des espaces vectoriels sur un corps donné $\mathbf{k}$. On prend $ob(\mathscr{C})$ = les $\mathbf{k}$-espaces vectoriels, et $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(E,F) = \mathscr{L}(E,F)$ = l'ensembles des applications *linéaires* $E \longrightarrow F$. La composition, et les identités, sont évidentes.

Exemple 6.1.4. La catégorie $\mathscr{G}ps$ des groupes, $ob(\mathscr{G}ps)$ = les groupes, avec ici $\mathrm{Hom}_{\mathscr{G}ps}(G,H)$ = les homomorphismes de groupes. Variante possible : la catégorie des groupes abéliens, que l'on va noter $\mathscr{A}b$ dans la suite.

Exemple 6.1.5. La catégorie des espaces topologiques que l'on note $\mathscr{T}op$: on a sans surprise $ob(\mathscr{T}op)$ = les espaces topologiques, $\mathrm{Hom}_{\mathscr{T}op}(X,Y)$ = les applications *continues* de X sur Y.

Exemple 6.1.6. La catégorie $\mathscr{H}o\mathscr{T}op$, pour laquelle $ob(\mathscr{H}o\mathscr{T}op) = ob(\mathscr{T}op)$ = les espaces topologiques, et $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}o\mathscr{T}op}(X,Y) = [X,Y]$ = les classes d'homotopie d'applications continues de X vers Y. La composition est induite par la composition normale des fonctions, c'est à dire $[f] \circ [g] = [f \circ g]$. D'après la proposition 1.4.11, cette opération est bien définie. On note que le morphisme « identité » d'un espace X vers lui-même est la classe d'homotopie de $x \mapsto x$.

Exemple 6.1.7. Il y a aussi la catégorie $\mathscr{T}op_\bullet$, dont les objets sont les paires (X, x_0) où X est un espace topologique, et $x_0 \in X$. Ici on prend $\mathrm{Hom}_{\mathscr{T}op_\bullet}((X,x_0),(Y,y_0)) =$

les applications continues $f\colon X \longrightarrow Y$ telles que $f(x_0) = y_0$. On parle de la catégorie des *espaces topologiques pointés.*

Enfin, il y a $\mathscr{HoTop}_\bullet$, qui a les mêmes objets que $\mathscr{Top}_\bullet$, mais cette fois-ci $\mathrm{Hom}_{\mathscr{HoTop}_\bullet}((X,x_0),(Y,y_0)) = [(X,x_0),(Y,y_0)]_\bullet$ (les classes d'homotopies relativement à $\{x_0\}$). On parle de la *catégorie homotopique pointée.*

On peut donner des définitions très générales avec le langage des catégories. Voici un exemple :

Définition 6.1.8. Soit $\mathscr{C}$ une catégorie, et $A, B \in ob(\mathscr{C})$. Un *isomorphisme* entre A et B (dans $\mathscr{C}$) est un morphisme $f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,B)$ qui a la propriété suivante : il existe $g \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(B,A)$ tel que $g \circ f = id_A$ et $f \circ g = id_B$. (On dit alors que g est un inverse pour f.)

Lorsqu'un isomorphisme existe, on dit aussi que A et B sont *isomorphes* (ou isomorphes dans $\mathscr{C}$).

Exemple 6.1.9. Un isomorphisme dans la catégorie des ensembles est juste une bijection. Dans la catégorie des groupes, ou des espaces vectoriels, ou des anneaux, c'est la notion usuelle d'isomorphisme. Dans $\mathscr{Top}$, un isomorphisme est un homéomorphisme. Enfin, dans $\mathscr{HoTop}$, un isomorphisme est une équivalence d'homotopie, et dans $\mathscr{HoTop}_\bullet$, c'est une équivalence d'homotopie pointée.

Remarque 6.1.10. L'argument usuel, pour montrer que l'application g comme dans la définition est en fait unique, marche dans une catégorie quelconque. Supposons en effet que $g \circ f = id_A$ et $f \circ g = id_B$, supposons que g' vérifie aussi ces conditions, et montrons que $g' = g$. Il suffit d'écrire

$$(g \circ f) \circ g' = id_A \circ g' = g' = g \circ (f \circ g') = g \circ id_B = g\,.$$

Donc $g = g'$. Cet unique morphisme g est appelé la *réciproque* de f, et on le note f^{-1}.

6.2. Foncteurs

Définition 6.2.1. Soient $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$ des catégories. Un *foncteur* F, ou *foncteur covariant*, entre $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$, est une règle qui

- associe à $A \in ob(\mathscr{C})$ un objet $F(A) \in ob(\mathscr{D})$,
- associe à $f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,B)$ un élément $F(f) \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(F(A),F(B))$.

On exige que $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$ et $F(id_A) = id_{F(A)}$. La notation est généralement $F : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$ comme pour une fonction.

Exemple 6.2.2. Un premier exemple s'obtient en prenant $\mathscr{C} = \mathscr{D} =$ les $\mathbf{k}$-espaces vectoriels. On a alors un foncteur défini par $F(E) = E \oplus E$ et $F(f) = f \oplus f$. Les vérifications sont immédiates, mais faites-les de tête.

Exemple 6.2.3. Il y a un foncteur $F : \mathcal{T}op \longrightarrow \mathcal{H}o\mathcal{T}op$ défini par $F(X) = X$ et $F(f) = [f]$. Là encore, on vous laisse le soin de faire les vérifications, ainsi que pour les exemples suivants.

Exemple 6.2.4. On peut considérer le foncteur $F \colon \mathcal{G}ps \longrightarrow \mathcal{A}b$ qui est donné par $F(G) = G^{ab}$, l'abélianisé de G. Dans l'exercice 22, nous avons vu comment $f \colon G \longrightarrow H$ induit $f^{ab} \colon G^{ab} \longrightarrow H^{ab}$.

Exemple 6.2.5. Soit $\mathcal{C}$ la catégorie des anneaux commutatifs : on vous laisse deviner sa définition, qui n'est pas très mystérieuse ! Il existe alors un foncteur, noté $\mathbf{GL}_n \colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{G}ps$, tel que

$$\mathbf{GL}_n(A) = \{ \text{ les matrices } n \times n \text{ inversibles à coefficients dans } A \} .$$

De la même manière, on a $\mathbf{SL}_n$, $\mathbf{O}_n$, etc. Ces foncteurs sont des exemples de *schémas en groupes.*

Exemple 6.2.6. L'exemple le plus important dans la première partie de ce cours, évidemment, est celui du groupe fondamental. On le voit comme un foncteur

$$\pi_1 \colon \mathcal{H}o\mathcal{T}op_\bullet \longrightarrow \mathcal{G}ps \, .$$

Vérifiez que les chapitres précédents contiennent effectivement toutes les démonstrations qu'il faut.

Voici un résultat qui est aussi simple que remarquable.

Lemme 6.2.7. *Soit $F \colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ un foncteur. Si $f \colon A \longrightarrow B$ est un isomorphisme dans $\mathcal{C}$, alors $F(f) \colon F(A) \longrightarrow F(B)$ est un isomorphisme dans $\mathcal{D}$.*

En particulier, un foncteur envoie des objets isomorphes sur des objets isomorphes.

Démonstration. Par hypothèse, il existe $g \colon B \longrightarrow A$ tel que $g \circ f = id_A$ et $f \circ g = id_B$. En appliquant F, on a $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f) = F(id_A) = id_{F(A)}$, et pareil dans l'autre sens, donc $F(g)$ est un inverse pour $F(f)$. $\square$

On retrouve, par exemple, le fait que deux espaces topologiques ayant le même type d'homotopie pointée ont des groupes fondamentaux isomorphes (c'était le corollaire 3.3.12).

Ajoutons une définition dont on ne va pas se servir énormément, dans ce cours, mais qui constitue un concept important dans l'étude des catégories en général :

Définition 6.2.8. Soit $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ des catégories, et soient F et G deux foncteurs $\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$. Une *transformation naturelle* T entre F et G est la donnée d'un morphisme $T_A : F(A) \longrightarrow G(A)$ pour chaque objet A de $\mathcal{C}$, de telle façon que le diagramme ci-dessous commute, pour tout $f : A \longrightarrow B$:

$$\begin{array}{ccc} F(A) & \xrightarrow{T_A} & G(A) \\ {\scriptstyle F(f)}\Big\downarrow & & \Big\downarrow{\scriptstyle G(f)} \\ F(B) & \xrightarrow{T_B} & G(B) \end{array}$$

(En d'autres termes, on doit avoir $G(f) \circ T_A = T_B \circ F(f)$: c'est ce qu'on exprime en raccourci en disant que « le diagramme commute » ou que c'est un « diagramme commutatif ».)

De plus, si pour tout A le morphisme T_A est un isomorphisme, alors on dit que T est une *équivalence naturelle*, ou un *isomorphisme de foncteurs* (ou encore parfois un *isomorphisme naturel*).

Exemple 6.2.9. Soit $F = \mathbf{GL}_n \times \mathbf{SL}_n$ et $G = \mathbf{SL}_n$. Alors on a une transformation naturelle

$$T_A : \mathbf{GL}_n(A) \times \mathbf{SL}_n(A) \longrightarrow \mathbf{SL}_n(A)$$
$$(P, M) \mapsto P^{-1}MP\,.$$

Exemple 6.2.10. Il y a aussi un foncteur $H_1 \colon \mathscr{HoTop}_\bullet \longrightarrow \mathscr{Ab}$ où $H_1(X, x_0)$ est l'abélianisé de $\pi_1(X, x_0)$ (à l'occasion d'un exercice, on a vu qu'on pouvait s'arranger pour que H_1 soit même un foncteur sur $\mathscr{HoTop}$ plutôt que $\mathscr{HoTop}_\bullet$, mais ici on ne s'en sert pas).

Dans ce cas, on a une transformation naturelle $T_X \colon \pi_1(X, x_0) \longrightarrow H_1(X, x_0)$, donnée par l'application quotient évidente. On vous laisse vérifier que c'est bien une transformation naturelle.

Remarque 6.2.11. Dans le cas où $F = G$, on a évidemment une transformation naturelle T, pour laquelle T_A est toujours l'identité de $F(A)$. Cette transformation naturelle est une équivalence naturelle.

Enfin, une dernière notion qui ne va pas servir avant le chapitre **??**. Vous pouvez ignorer ce passage en première lecture.

Définition 6.2.12. Soit $\mathscr{C}$ une catégorie. La *catégorie opposée* $\mathscr{C}^{op}$ possède les mêmes objets, mais par contre, on a par définition :

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}^{op}}(A, B) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(B, A)\,.$$

La composition est définie de la seule manière possible : si $f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}^{op}}(A, B)$ et $g \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}^{op}}(B, C)$, alors la composition $g \circ^{op} f$ dans $\mathscr{C}^{op}$ est $g \circ^{op} f = f \circ g \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(C, A) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}^{op}}(A, C)$.

Dans un premier temps, c'est surtout utile pour définir les foncteurs *contravariants* :

Définition 6.2.13. Soient $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$ deux catégories. Un *foncteur contravariant* de $\mathscr{C}$ vers $\mathscr{D}$ est par définition un foncteur (usuel, covariant) $\mathscr{C}^{op} \longrightarrow \mathscr{D}$.

On peut bien sûr dire ça autrement : F est un foncteur contravariant de $\mathscr{C}$ vers $\mathscr{D}$ s'il associe à tout objet A de $\mathscr{C}$ un objet $F(A)$ de $\mathscr{D}$, et à chaque $f\colon A \longrightarrow B$ un morphisme $F(f)\colon F(B) \longrightarrow F(A)$. On doit avoir $F(id_A) = id_{F(A)}$ et $F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$.

Exemple 6.2.14. Soit $\mathscr{C}$ la catégorie des $\mathbf{k}$-espaces vectoriels et des applications linéaires. Alors un foncteur $F\colon \mathscr{C}^{op} \longrightarrow \mathscr{C}$ très classique est celui de *dualité* : on prend $F(E) = E^* = \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(E, \mathbf{k})$, et si $f\colon E \longrightarrow F$, alors $F(f) = f^*\colon F^* \longrightarrow E^*$, qu'on appelle souvent la *transposée de f* pour des raisons évidentes, et qui est définie par $f^*(\varphi) = \varphi \circ f$.

Exemple 6.2.15. Soit $\mathscr{C}$ la catégorie des anneaux. Un foncteur $\mathscr{T}op^{op} \longrightarrow \mathscr{C}$ classique est C^0, qui associe à X l'anneau $C^0(X)$ des fonctions continues $X \longrightarrow \mathbf{R}$. On vous laisse définir l'action de C^0 sur les morphismes (c'est-à-dire les applications continues entre espaces topologiques). Le tout dernier chapitre de ce livre étudie ce genre de foncteur en détail.

6.3. Les G-ensembles

Faisons une parenthèse pour étudier deux catégories, très proches l'une de l'autre, qui auront un rôle dans la suite. Par ailleurs, ce sont de « bons exemples » de catégories, suffisamment différentes de la catégorie des ensembles pour être intéressantes, tout en restant faciles à comprendre.

Définition 6.3.1. Soit G un groupe. La catégorie G–$\mathscr{E}ns$ a pour objets les G-ensembles (à gauche). En clair, un tel objet est un ensemble X avec une action de G, c'est-à-dire une fonction

$$G \times X \longrightarrow X$$

notée $(g, x) \mapsto g \cdot x$, qui vérifie $g \cdot (h \cdot x) = gh \cdot x$ pour $g, h \in G$ et $x \in X$, ainsi que $1 \cdot x = x$ (ici 1 désigne l'élément neutre de G). Un morphisme $f\colon X \longrightarrow Y$ dans G–$\mathscr{E}ns$ est une fonction (au sens usuel) qui est G-équivariante, c'est-à-dire que $f(g \cdot x) = g \cdot f(x)$ pour $g \in G, x \in X$.

De même, on définit la catégorie $\mathscr{E}ns$–G des G-ensembles à droite. Cette fois-ci, les actions sont notées $(x, g) \mapsto x \cdot g$ et vérifient $(x \cdot g) \cdot h = x \cdot gh$, ainsi que $x \cdot 1 = x$. Sans surprise, une fonction $f\colon X \longrightarrow Y$ entre G-ensembles à droite est dite G-équivariante lorsque $f(x \cdot g) = f(x) \cdot g$, et ces fonctions sont les morphismes dans $\mathscr{E}ns$–G.

Par exemple, on a vu qu'en présence d'un revêtement $p\colon E \longrightarrow X$, la fibre $p^{-1}(x_0)$ est un $\pi_1(X, x_0)$-ensemble à droite.

Pour explorer d'autres exemples, nous avons besoin des notations pour les quotients (attention, vous pouvez être surpris ici). Si G agit à gauche sur X (autrement dit si $X \in ob(G$–$\mathscr{E}ns))$, l'ensemble « quotient », c'est-à-dire l'ensemble des orbites, est noté la plupart du temps X/G en suivant une vieille habitude. Nous l'avons fait ci-dessus avec des espaces de la forme E/G. Mais on pourrait le noter $G\backslash X$ pour rappeler que l'action est à gauche, et nous le ferons de temps en temps, surtout lorsqu'il y a plusieurs actions, certaines à gauche et d'autres à droites.

Il y a un cas classique où cette notation est employée : supposons que G est un sous-groupe de Γ, et faisons agir G sur Γ par multiplication à gauche. Alors on note à peu près toujours

$$G\backslash\Gamma = \{G\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$$

pour l'ensemble des orbites.

Dans le cas d'une action à droite, le quotient se note tout naturellement X/G. Dans l'exemple ci-dessus, on peut faire agir G sur Γ par multiplication à droite, et on note

$$\Gamma/G = \{\gamma G \mid \gamma \in \Gamma\}\,.$$

(La notation Γ/G pour cet ensemble des classes est très usuelle, bien plus que la notion d'une « action à droite » !)

Petit exercice : G est distingué dans Γ si et seulement si $G\backslash\Gamma = \Gamma/G$ (ce n'est pas une bijection, mais une égalité d'ensembles de parties de Γ).

On a parfois, comme dans cet exemple, deux actions sur X, une du groupe G à gauche et une du groupe H à droite, qui « commutent » dans le sens où $(g \cdot x) \cdot h = g \cdot (x \cdot h)$ pour $g \in G$, $h \in H$. Dans ce cas H agit à droite sur $G\backslash X$ et G agit à gauche sur X/H ; le quotient est le même dans les deux cas, on le note $G\backslash X/H$. Le cas particulier où G et H sont des sous-groupes d'un groupe Γ, avec les actions comme ci-dessus, est important. Et même plus spécifiquement, avec $G = \Gamma$ et H un sous-groupe quelconque de G, on retient que G agit à gauche sur G/H et à droite sur $H\backslash G$ (attention !).

Puisque G–$\mathscr{E}ns$ est une catégorie, on a une notion d'isomorphisme. En fait, on sait très bien décrire les objets « à isomorphisme près », et vous l'avez déjà vu, avec un autre langage. Voyons-ça. Rappelons que l'action de G sur X est dite *transitive* si, pour tous $x, y \in X$, on peut trouver un g tel que $g \cdot x = y$; on dit aussi, pour faire court, que X est transitif. Tout G-ensemble est une réunion d'orbites, et c'est donc une union (disjointe) de G-ensembles transitifs.

Les orbites se comportent un peu comme les composantes connexes en topologie, notamment parce qu'on a la remarque suivante :

Lemme 6.3.2. *Si $f\colon X \longrightarrow Y$ est un morphisme dans $G\text{–}\mathcal{E}ns$, et si X est transitif, alors $f(X)$ est transitif ; en fait $f(X)$ est une orbite dans Y.*

Démonstration. Si $f(x_1)$ et $f(x_2)$ sont dans $f(X)$, alors on écrit $x_2 = g \cdot x_1$, de sorte que $f(x_2) = g \cdot f(x_1)$, donc $f(X)$ est transitif.

Par ailleurs $f(X)$ est stable par l'action de G, puisque $g \cdot f(x) = f(g \cdot x)$ par hypothèse. Or, dans un G-ensemble Y quelconque, une partie transitive et stable par l'action de G est une orbite (presque par définition). $\square$

Ainsi, un isomorphisme entre G-ensembles réalise des isomorphismes entre leurs orbites individuelles. Il s'agit donc de comprendre à quoi peut ressembler une orbite, et on aura alors une bonne idée des G-ensembles « à isomorphisme près ». Mais nous allons faire un peu mieux (c'est typiquement le genre d'amélioration du cours de L3 que le langage des catégories nous amène à faire) : on va décrire l'ensemble $\mathrm{Hom}_{G\mathcal{E}ns}(X, Y)$ lorsque X et Y sont tous les deux transitifs. En plus, on va faire ça d'une façon qui évoque notre travail précédent sur les revêtements.

On rappelle que le *stabilisateur* de $x \in X$ est

$$Stab_G(x) = \{g \in G \mid g \cdot x = x\} .$$

Lemme 6.3.3. *Soient X et Y deux G-ensembles transitifs, et soient $x \in X$, $y \in Y$. Alors il y a équivalence entre :*

1. *il existe $f\colon X \longrightarrow Y$ dans $G\text{–}\mathcal{E}ns$ tel que $f(x) = y$;*
2. *$Stab_G(x) \subset Stab_G(y)$.*

De plus, lorsque ces conditions sont satisfaites, le morphisme f est unique.

Démonstration. Supposons que f existe. Alors pour $g \in Stab_G(x)$ on a

$$y = f(x) = f(g \cdot x) = g \cdot f(x) = g \cdot y ,$$

donc $g \in Stab_G(y)$.

Réciproquement, supposons que $Stab_G(x) \subset Stab_G(y)$. Puisque X est transitif, chaque élément de X peut s'écrire $g \cdot x$ pour un $g \in G$. Ce g n'est pas unique, mais si $g' \cdot x = g \cdot x$, alors $g^{-1}g' \cdot x = x$, d'où $g^{-1}g' \in Stab_G(x) \subset Stab_G(y)$, et par suite $g \cdot y = g' \cdot y$. On peut donc définir $f\colon X \longrightarrow Y$ par $f(g \cdot x) = g \cdot y$, et la fonction f est bien définie. Bien sûr $f(x) = y$.

On vérifie que, pour tout $a \in X$, $g \in G$, on a bien, en écrivant $a = g_0 \cdot x$, les égalités

$$f(g \cdot a) = f(gg_0 \cdot x) = gg_0 \cdot y = g \cdot f(a)\,.$$

Donc f est bien un morphisme de G-ensembles. L'équivalence est démontrée.

L'unicité est assez évidente : si $f\colon X \longrightarrow Y$ est compatible avec l'action de G, alors $f(g \cdot x) = g \cdot f(x) = g \cdot y$, donc nous n'avions pas le choix. $\square$

Corollaire 6.3.4. *Les G-ensembles transitifs X et Y sont isomorphes si et seulement s'il existe $x \in X$ et $y \in Y$ tels que $Stab_G(x) = Stab_G(y)$. Plus précisément, si de tels x et y existent, alors l'unique morphisme $X \longrightarrow Y$ qui envoie x sur y est un isomorphisme.*

Démonstration. Si $f\colon X \longrightarrow Y$ est un isomorphisme, on prend $x \in X$ quelconque et on pose $y = f(x)$. Par le lemme, on a $Stab_G(x) \subset Stab_G(y)$. En considérant la réciproque $f^{-1}\colon Y \longrightarrow X$, on obtient l'inclusion inverse.

Maintenant, supposons que $Stab_G(x) = Stab_G(y)$ pour des choix de $x \in X$, $y \in Y$. Par le lemme, on construit $f\colon X \longrightarrow Y$ tel que $f(x) = y$, et $g\colon Y \longrightarrow X$ tel que $g(y) = x$. Alors $g(f(x)) = x$. Par la partie « unicité » du lemme, on conclut que $g \circ f$ est l'identité. De manière symétrique, $f \circ g$ est l'identité. Donc f est un isomorphisme. $\square$

L'importance des stabilisateurs est maintenant claire. Examinons-les de plus près :

Lemme 6.3.5. *Soit X un G-ensemble, soit $x \in X$, et soit $y = g \cdot x$ pour un $g \in G$. Alors $Stab_G(y) = gStab_G(x)g^{-1}$.*

En particulier, si X est transitif, alors les stabilisateurs des points de X forment une classe de conjugaison dans G.

Démonstration. On écrit, pour $\sigma \in G$:

$$\sigma \cdot y = y \Longleftrightarrow (\sigma g) \cdot x = g \cdot x \Longleftrightarrow g^{-1}\sigma g \cdot x = x\,,$$

donc $\sigma \in Stab_G(y) \Longleftrightarrow g^{-1}\sigma g \in Stab_G(x)$, ce qui montre l'égalité. La suite est évidente. $\square$

Le lemme suivant est un grand classique, que vous avez vu en L3, au moins pour la première moitié. Maintenant, c'est pour nous un résumé (frappant !) des petits résultats que nous venons de voir.

Lemme 6.3.6. *On suppose que G agit transitivement sur X, et on choisit $x_0 \in X$. Si on pose $H = Stab_G(x_0)$, alors l'application*

$$G/H \longrightarrow X$$

définie par $gH \mapsto g \cdot x_0$ est bien définie, et c'est un isomorphisme dans G–$\mathscr{E}ns$.

De plus, si H et K sont deux sous-groupes de G, alors G/H et G/K sont isomorphes dans G–$\mathscr{E}ns$ si et seulement si H et K sont conjugués dans G.

Démonstration. On peut bien sûr montrer tout ça directement (vous avez dû le faire l'an dernier), mais maintenant, plus besoin. Il suffit de faire la remarque que le stabilisateur de H, dans l'action de G sur G/H, est H lui-même. C'est aussi le stabilisateur de x_0, donc G/H et X sont isomorphes. Plus précisément, l'unique morphisme $G/H \longrightarrow X$ qui envoie H sur x_0 est un isomorphisme, et c'est celui du lemme.

Les stabilisateurs des éléments de G/H sont les conjugués de H, par le lemme précédent ; de même pour G/K. Le corollaire 6.3.4 nous dit bien, dans ce cas, que G/H et G/K sont isomorphes si et seulement si H et K sont conjugués. □

On vient donc de voir qu'il y a une bijection entre les G-ensembles transitifs, à isomorphisme près, et les classes de conjugaison de sous-groupes de G. Comme dans le théorème de classification des revêtements, et ce n'est pas un hasard !

Tout ce qu'on vient de dire reste vrai « à droite ». Par exemple on a :

Lemme 6.3.7. *On suppose que G agit transitivement sur X à droite, et on choisit $x_0 \in X$. Si on pose $H = Stab_G(x_0)$, alors l'application*

$$H\backslash G \longrightarrow X$$

définie par $Hg \mapsto x \cdot g$ est bien définie, et c'est un isomorphisme dans $\mathscr{E}ns$–G.

De plus, si H et K sont deux sous-groupes de G, alors $H\backslash G$ et $K\backslash G$ sont isomorphes dans $\mathscr{E}ns$–G si et seulement si H et K sont conjugués dans G.

Nous citerons aussi les lemmes précédents, en précisant éventuellement que nous prenons « la version pour les actions à droite ».

6.4. Équivalences de catégories

Il y a deux façons de définir ce qu'est une « équivalence de catégories ». Nous allons insister sur la définition que l'on emploie en pratique (qui n'est peut-être pas la plus élégante).

Définition 6.4.1. Soit $F : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$ un foncteur. On dit que F est *pleinement fidèle* lorsque pour tout $A, B \in \mathscr{C}$, l'application

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(F(A), F(B))$$

induite par F est une bijection. On dit que F est *essentiellement surjectif* lorsque chaque objet X de $\mathscr{D}$ est isomorphe à un object de la forme $F(A)$ pour un A dans $\mathscr{C}$.

Enfin, lorsque F est à la fois pleinement fidèle et essentiellement surjectif, on dit que c'est une *équivalence de catégories.*

Mentionnons immédiatement :

Lemme 6.4.2. *Soit F un foncteur $\mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$. Alors F est une équivalence de catégories si et seulement s'il existe un foncteur $G\colon \mathscr{D} \longrightarrow \mathscr{C}$ et des équivalences naturelles entre $G \circ F$ et le foncteur identité de $\mathscr{C}$, ainsi qu'entre $F \circ G$ et le foncteur identité de $\mathscr{D}$.*

Évidemment, cette façon de voir les choses est très intuitive : on dirait presque la définition d'une bijection ! Mais en pratique, ce lemme ne sera pas vraiment utile, c'est d'ailleurs pour ça que nous laisserons de côté certains détails dans la deuxième moitié de la démonstration. En première lecture, vous pouvez l'ignorer.

Démonstration. Supposons d'abord qu'un tel G existe. Le fait que F est essentiellement surjectif est le plus simple : par hypothèse tout $X \in ob(\mathscr{D})$ est isomorphe à $F \circ G(X)$, donc à $F(A)$ pour $A = G(X)$.

Montrons que F est pleinement fidèle. Par hypothèse, on a une équivalence naturelle T entre l'identité et $G \circ F$, donc on a des diagrammes commutatifs

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "T_A"] \arrow[d, "f"'] & G \circ F(A) \arrow[d, "G(F(f))"] \\ B \arrow[r, "T_B"] & G \circ F(B) \end{tikzcd}$$

pour tout $f\colon A \longrightarrow B$. Donc $f = T_B \circ G(F(f)) \circ T_A^{-1}$. Traduisons ceci : on considère

$$F_{A,B}\colon \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(A,B) \longrightarrow \operatorname{Hom}_{\mathscr{D}}(F(A), F(B))$$

donnée par $f \mapsto F(f)$, ainsi que

$$G_{A,B}\colon \operatorname{Hom}_{\mathscr{D}}(F(A), F(B)) \longrightarrow \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(A,B)$$

donnée par $\varphi \mapsto T_B \circ G(\varphi) \circ T_A^{-1}$. Alors le diagramme commutatif signifie que $G_{A,B} \circ F_{A,B}(f) = f$. En particulier, $F_{A,B}$ est injective, et $G_{A,B}$ est surjective. Mais par symétrie, l'association $\varphi \mapsto G(\varphi)$ est aussi injective. On en déduit que $G_{A,B}$ est injective. Finalement $G_{A,B}$ est une bijection, et $F_{A,B} = G_{A,B}^{-1}$ aussi. Ceci montre que F est pleinement fidèle.

Voyons la réciproque, et supposons que (1) F est pleinement fidèle, et (2) F est essentiellement surjectif. Il faut utiliser l'axiome du choix pour choisir, pour chaque $X \in ob(\mathscr{D})$, un objet $A \in ob(\mathscr{C})$ et un isomorphisme de la forme $\varphi_X : X \longrightarrow F(A)$. C'est possible par le (2).

On va construire un foncteur $G \colon \mathscr{D} \longrightarrow \mathscr{C}$ en associant, tout d'abord, à $X \in ob(\mathscr{D})$ l'objet $G(X) := A$ que l'axiome du choix nous a trouvé. Ensuite, si $f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(X, Y)$, on considère $f' = \varphi_Y \circ f \circ \varphi_X^{-1} \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(F(A), F(B))$. D'après le (1), il existe un unique morphisme dans $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B)$, appelons-le $G(f)$, tel que $F(G(f)) = f'$.

Il faut d'abord vérifier que G est un foncteur, c'est-à-dire essentiellement qu'il est compatible avec la composition. On le laisse en exercice, c'est très simple. Ensuite, il faut montrer qu'il y a une équivalence naturelle entre $F \circ G$ et le foncteur identité : mais cette équivalence est donnée par la famille des φ_X elle-même, quand on y regarde bien.

Enfin, il faut trouver une équivalence naturelle entre $G \circ F$ et le foncteur identité de $\mathscr{C}$. On commence par noter que si $X = F(A_0)$, alors $\varphi_X : F(A_0) \longrightarrow A$ est de la forme $F(f)$ pour un unique isomorphisme $f \colon A_0 \longrightarrow A$, d'après le (1). C'est ce f que l'on appelle $T_{A_0} \colon A_0 \longrightarrow G(F(A_0))$, et nous avons la transformation naturelle, après une petite séries de vérifications que l'on laisse encore au lecteur. $\square$

Vous pouvez avoir des objections contre l'utilisation de l'axiome du choix (en plus du malaise habituel, ici nous faisons un choix pour chaque objet X de $\mathscr{D}$, alors même que ces objets ne forment pas un ensemble...), et vous pouvez éventuellement trouver cette démonstration un peu compliquée. En pratique, on ne va pas vraiment se servir du lemme – et pas du tout de la deuxième moitié, l'existence de G sous l'hypothèse que F est une équivalence.

Exemple 6.4.3. On va construire une équivalence de catégories

$$F \colon G\text{–}\mathscr{E}ns \longrightarrow \mathscr{E}ns\text{–}G\,,$$

où G est un groupe fixé. Soit $X \in ob(G\text{–}\mathscr{E}ns)$, qui est donc un ensemble muni d'une action à gauche, notée $(g, x) \mapsto g \cdot x$. On définit $F(X) \in ob(\mathscr{E}ns\text{–}G)$ en prenant le même ensemble X, mais avec l'action

$$x \cdot g := g^{-1} \cdot x\,,$$

pour $g \in G, x \in X$. Il faut vérifier que c'est bien une action à droite :

$$(x \cdot g) \cdot h = (g^{-1} \cdot x) \cdot h = h^{-1} \cdot (g^{-1} \cdot x) = (h^{-1} g^{-1}) \cdot x = (gh)^{-1} \cdot x = x \cdot gh\,,$$

comme souhaité.

Ensuite, si $f \in \mathrm{Hom}_{G\text{-}\mathscr{E}ns}(X, Y)$, on définit $F(f) := f$. La même application f entre les ensembles X est Y est, en effet, bel et bien un morphisme entre $F(X)$ et $F(Y)$ dans $\mathscr{E}ns\text{–}G$, puisque

$$f(x \cdot g) = f(g^{-1} \cdot x) = g^{-1} \cdot f(x) = f(x) \cdot g\,.$$

Avec ces définitions, F est bien un foncteur.

Nous sommes dans l'une des rares situations où l'on peut définir un foncteur dans l'autre sens sans difficulté. En effet, de manière symétrique, on définit $F' \colon \mathscr{E}ns\text{-}G \longrightarrow G\text{-}\mathscr{E}ns$ par $F'(X) := X$ avec l'action à gauche $g \cdot x := x \cdot g^{-1}$, et $F'(f) := f$.

Ces deux foncteurs sont inverses l'un de l'autre, et en fait ici $F' \circ F$ est vraiment le foncteur identité de $G\text{-}\mathscr{E}ns$, de même que $F \circ F'$ est le foncteur identité de $\mathscr{E}ns\text{-}G$. Nul besoin d'utiliser une équivalence naturelle autre que l'identité (comme dans la remarque 6.2.11). Par le lemme (la moitié facile), on a bien une équivalence de catégories.

Il est peut-être utile de faire remarquer la chose suivante.

Lemme 6.4.4. *Soit $F \colon \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$ une équivalence de catégories, et soit $f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B)$. Alors f est un isomorphisme si et seulement si $F(f) \colon F(A) \longrightarrow F(B)$ est un isomorphisme.*

Démonstration. Le lemme 6.2.7 montre que si f est un isomorphisme, alors $F(f)$ aussi. Montrons la réciproque (noter que l'on ne va pas utiliser un foncteur dans l'autre sens). Soit $\varphi \colon F(B) \longrightarrow F(A)$ tel que $\varphi \circ F(f) = id_{F(A)}$, et $F(f) \circ \varphi = id_{F(B)}$. Alors, puisque F est pleinement fidèle, on a $\varphi = F(g)$ pour un unique $g \colon B \longrightarrow A$. De plus

$$F(g \circ f) = F(g) \circ F(f) = \varphi \circ F(f) = id_{F(A)} = F(id_A)\,,$$

d'où $g \circ f = id_A$, à nouveau en utilisant que F est pleinement fidèle. Pareil dans l'autre sens. Finalement, f est un isomorphisme. $\square$

Remarque 6.4.5. Pour une catégorie $\mathscr{C}$, notons

$$\mathrm{Iso}(\mathscr{C}) = \{\text{objets de } \mathscr{C} \text{ à isomorphisme près}\}\,,$$

dans les cas où ça a un sens. (En effet, il se peut que $\mathrm{Iso}(\mathscr{C})$ soit « trop gros » pour être un ensemble ; mais dans ce cas, on pourra parler informellement de $\mathrm{Iso}(\mathscr{C})$ comme de la collection des objets à isomorphisme près). Si $F \colon \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$ est une équivalence de catégories, on a alors une bijection

$$\mathrm{Iso}(\mathscr{C}) \longrightarrow \mathrm{Iso}(\mathscr{D})\,.$$

C'est ce que le dernier lemme affirme, en n'oubliant pas que F est essentiellement surjectif.

Par exemple, si $\mathscr{C}$ est la catégorie des G-ensembles à gauche *transitifs*, et si $\mathscr{D}$ est celle des G-ensembles à droite, transitifs également, alors ces deux catégories sont équivalentes, par une modification de l'argument précédent. Et dans ce cas, on a

$$\mathrm{Iso}(\mathscr{C}) = \mathrm{Iso}(\mathscr{D}) = \{\text{les classes de conjugaison de sous-groupes de } G\}\,,$$

voir la discussion précédant le lemme 6.3.7.

6.5. Retour sur la classification des revêtements

On va énoncer cette classification de la « bonne » façon, comme une équivalence de catégories. Dans la suite, on va essayer de vous convaincre qu'il y a véritablement de la valeur ajoutée, en donnant une démonstration du théorème de Van Kampen.

Tout le long de discussion, nous fixons un espace topologique X connexe et localement contractile. Commençons par définir une catégorie $\mathscr{C}ov(X)$, que nous appellerons pour aller vite « la catégorie des revêtements de X ». Un objet de $\mathscr{C}ov(X)$ est un revêtement

$$p\colon Y \longrightarrow X\,.$$

L'ensemble $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}ov(X)}(p,q)$ des morphismes entre p et q, où p est comme ci-dessus et $q\colon Z \longrightarrow X$, est constitué des $f\colon Y \longrightarrow Z$ (continues !) telles que $q \circ f = p$, comme ci-dessous :

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p"'] & & Z \arrow[dl, "q"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

(On parle parfois des « morphismes au-dessus de X ».) Les compositions se font de manière évidente, et les identités sont également sans surprise (en symboles, $id_p = id_Y$, pour $p\colon Y \longrightarrow X$ comme ci-dessus).

Théorème 6.5.1. *Soit X connexe et localement contractile, et soit $x_0 \in X$. Il existe une équivalence de catégories*

$$F\colon \mathscr{C}ov(X) \longrightarrow \mathscr{E}ns\text{–}\pi_1(X,x_0)$$

donnée par $F(p) = p^{-1}(x_0)$, ce dernier étant vu comme un $\pi_1(X,x_0)$-ensemble à droite avec l'action de monodromie.

Démonstration. Tous les points techniques nécessaires ont été donnés dans le début du cours, il s'agit juste de les citer dans le bon ordre.

Commençons par détailler la définition du foncteur « fibre » F. Posons $\pi = \pi_1(X, x_0)$. On voit $p^{-1}(x_0)$ comme un π-ensemble à droite à travers l'action de monodromie, comme annoncé. La définition de F est donc donnée sur les objets. Maintenant, si $f\colon p \longrightarrow q$ est un morphisme de revêtements, alors $F(f)$ est simplement la restriction de f à $p^{-1}(x_0)$, qui est bien à valeurs dans $q^{-1}(x_0)$. Il faut vérifier que ceci est un morphisme dans $\mathscr{E}ns$–π, c'est-à-dire que f est compatible avec l'action de monodromie ; mais c'est juste le lemme 4.4.5 (on l'a énoncé pour les automorphismes plutôt que les morphismes quelconques, mais le résultat est visiblement général, par le même argument). Finalement, on a bien un foncteur.

Il faut évacuer quelque chose tout de suite. Les revêtements que l'on considère ne sont pas forcément connexes, et les π-ensembles ne sont pas forcément transitifs. Et en fait, les deux phénomènes se correspondent : nous affirmons que si $p\colon Y \longrightarrow X$ est un revêtement, alors Y est connexe si et seulement si $p^{-1}(x_0)$ est transitif. La proposition 4.3.1 nous donne déjà la nécessité de cette condition. Pour la réciproque, si $Y = \coprod_{i\in I} Y_i$, où les Y_i sont les composantes connexes, alors on note d'abord que, puisque X est connexe et localement connexe, la restriction de p à chaque Y_i est un revêtement de X, par le lemme 5.4.2. Ensuite on observe que $p^{-1}(x_0) = \coprod_{i\in I} Y_i \cap p^{-1}(x_0)$, et par construction, l'action de monodromie préserve chaque ensemble $Y_i \cap p^{-1}(x_0)$, qui est non-vide. Donc si Y n'est pas connexe, l'ensemble des indices I contient au moins deux éléments, et $p^{-1}(x_0)$ renferme au moins deux orbites. On a bien montré que Y est connexe exactement quand $p^{-1}(x_0)$ est transitif, et même mieux, les orbites dans $p^{-1}(x_0)$ sont exactement les $Y_i \cap p^{-1}(x_0)$, qui sont en bijection avec les composantes connexes de Y (ou avec l'ensemble I, si l'on veut).

On peut même faire une remarque plus générale : sur les deux catégories que l'on regarde, on a une définition simple de l'union disjointe, et on remarque que $F(\coprod_{i\in I} p_i) = \coprod_{i\in I} F(p_i)$.

Après ces préliminaires, montrons que F est pleinement fidèle. La version courte, c'est que le lemme 6.3.3 est un analogue parfait du théorème du relèvement 4.2.5, donc les morphismes vont être « les mêmes » dans les deux catégories. Voyons ça en détail. Montrons donc que

$$F_{p,q}\colon \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}ov(X)}(p, q) \longrightarrow \operatorname{Hom}_{\mathscr{E}ns\text{–}\pi}(p^{-1}(x_0), q^{-1}(x_0))$$

est bijective, où $p\colon Y \longrightarrow X$ et $q\colon Z \longrightarrow X$ sont deux revêtements fixés, avec la décomposition en composantes connexes $Y = \coprod_{i\in Y} Y_i$, et de même $Z = \coprod_{j\in J} Z_j$.

Pour l'injectivité, on note simplement qu'un $f\colon p \longrightarrow q$ est un relèvement de p par rapport au revêtement q, et la restriction d'un tel relèvement à la composante connexe Y_i de Y est déterminée par une seule de ses valeurs (c'est la partie « unicité » dans le théorème du relèvement, ou alors c'est le corollaire 4.2.2). Ainsi, f est déterminée par sa restriction à $p^{-1}(x_0)$, car cet ensemble contient un point dans chaque composante connexe, donc $F_{p,q}$ est certainement injective.

Voyons la surjectivité. On se donne donc $\varphi\colon p^{-1}(x_0) \longrightarrow q^{-1}(x_0)$, et on choisit $y_0 \in p^{-1}(x_0)$, avant de poser enfin $z_0 = \varphi(y_0)$. Soit i et j les indices tels que $y_0 \in Y_i$ et $z_0 \in Z_j$. Par le lemme 6.3.3 (ou plutôt, l'analogue de ce lemme pour les actions à droite !), appliqué aux ensembles transitifs $Y_i \cap p^{-1}(x_0)$ et $Z_j \cap q^{-1}(x_0)$, l'existence de φ garantit que $Stab_\pi(y_0) \subset Stab_\pi(z_0)$. Par la proposition 4.3.1, on a $Stab_\pi(y_0) = p_*(\pi_1(Y_i, y_0))$, et de même $Stab_\pi(z_0) = q_*(\pi_1(Z_j, z_0))$. Mais alors, on a les bonnes hypothèses pour invoquer le théorème 4.2.5, ce qui donne $f_i\colon Y_i \longrightarrow Z_j$ telle que $q \circ f_i = p$, et $f(y_0) = z_0$. Enfin, la restriction de f_i et le morphisme φ envoient tous les deux y_0 sur z_0, donc par la partie « unicité » du lemme 6.3.3, on a $f_i = \varphi$ sur $Y_i \cap p^{-1}(x_0)$. Ayant défini f_i pour chaque indice i, on considère $f\colon Y \longrightarrow Z$ dont la restriction à Y_i est f_i. Il est alors clair que $F(f) = \varphi$.

La dernière étape consiste à montrer que F est essentiellement surjectif. Rappelons à nous les résultats des chapitres précédents : X possède un revêtement universel $p_0\colon E \longrightarrow X$, et si $G := Gal(p_0)$, alors on peut (et on va) identifier X avec E/G. On dispose aussi de l'isomorphisme

$$\tau\colon G \longrightarrow \pi_1(X, x_0)\,.$$

Soit S un π-ensemble à droite. Il faut montrer que S est isomorphe à $F(p)$ pour un p bien choisi. Or, puisque F est compatible avec les unions disjointes, il suffit, visiblement, de le faire en supposant que S est transitif. D'après le lemme 6.3.7, S est isomorphe à $\kappa\backslash\pi$ pour un sous-groupe κ de π, donc on cherche finalement un revêtement p tel que $F(p)$ est isomorphe à $\kappa\backslash\pi$; par le même lemme, il suffit de montrer que le stabilisateur d'un point quelconque de $F(p)$ est conjugué à κ, et dans les notations d'un chapitre précédent, il s'agit de montrer que $\kappa \in \mathscr{C}(p)$.

Pour ceci, on pose $H = \tau^{-1}(\kappa)$, qui est un sous-groupe de G, et on va prendre

$$p = p_H\colon E/H \longrightarrow E/G = X\,.$$

La proposition 5.3.1 nous affirme alors que $\kappa = \tau(H) \in \mathscr{C}(p)$, ce qui conclut la démonstration. □

Au cours de la démonstration, nous en avons appris un peu plus. Voici un corollaire de l'argument :

Corollaire 6.5.2. *La catégorie des revêtements connexes de X est équivalente à celle des $\pi_1(X, x_0)$-ensembles transitifs (à droite).*

Un corollaire du corollaire, en utilisant la remarque 6.4.5, est :

Corollaire 6.5.3. *Il y a une bijection entre les revêtements connexes de X, à isomorphisme près, et les classes de conjugaison de sous-groupes de $\pi_1(X, x_0)$.*

Nous le savions déjà, évidemment !

Nous allons maintenant essayer de vous convaincre que l'équivalence de catégories est une chose plus puissante que le dernier corollaire. On va s'en servir pour montrer le théorème de Van Kampen.

6.6. Van Kampen : la partie difficile

On reprend les hypothèses de la proposition 3.5.1 : soit X un espace topologique, que l'on suppose maintenant localement contractile, pour pouvoir appliquer les théorèmes de classification. On suppose que $X = U \cup V$, où U et V sont des ouverts connexes par arcs, et on suppose que $U \cap V$ est connexe par arcs (et non-vide). On prend $x_0 \in U \cap V$ comme point-base dans la suite. Enfin, soient $i\colon U \longrightarrow X$ et $j\colon V \longrightarrow X$ les inclusions. Nous ajoutons maintenant $k\colon U \cap V \longrightarrow U$ et $\ell\colon U \cap V \longrightarrow V$, de sorte que l'on a un diagramme

$$\begin{array}{ccc} U \cap V & \xrightarrow{k} & U \\ \ell \big\downarrow & & \big\downarrow i \\ V & \xrightarrow{j} & X\,. \end{array}$$

Ce diagramme commute, c'est-à-dire que $i \circ k = j \circ \ell$, et ainsi $i_* \circ k_* = j_* \circ \ell_*$ au niveau des π_1. Le théorème de Van Kampen va affirmer, d'une façon un peu abstraite, que cette relation est la plus importante pour comprendre le groupe $\pi_1(X)$.

Proposition 6.6.1. *Dans la situation ci-dessus, soit S un ensemble. On suppose que S possède une action de $\pi_1(U)$, notée $(s, g) \mapsto s \star g$, ainsi qu'une action de $\pi_1(V)$, notée $(s, g) \mapsto s \bullet g$. De plus, on suppose que pour tout $g \in \pi_1(U \cap V)$, l'action de $k_*(g)$ coïncide avec l'action de $\ell_*(g)$, c'est-à-dire*

$$s \star k_*(g) = s \bullet \ell_*(g)\,.$$

Alors il existe une unique action de $\pi_1(X)$ sur S, notée $(s, g) \mapsto s \cdot g$, qui étend les actions précédentes, dans le sens où pour $g \in \pi_1(U)$ et $s \in S$, on a $s \star g = s \cdot i_*(g)$, et pour $h \in \pi_1(V)$ on a $s \bullet h = s \cdot j_*(h)$.

Avant de se lancer dans la démonstration, quelques remarques vont être utiles. Supposons que S est un ensemble, avec une action d'un groupe G, notée $\star$, et une action d'un groupe H, notée $\bullet$. Soit X un G-ensemble (toutes les actions sont à droite), avec un isomorphisme

$$\varphi_1 \colon X \longrightarrow S$$

de G-ensembles ; et par ailleurs, soit Y un H-ensemble, avec un isomorphisme

$$\varphi_2 \colon Y \longrightarrow S$$

de H-ensembles. (On suppose que X et Y sont disjoints.) Nous pouvons « réunir » X et Y en un seul ensemble, muni d'actions de G et de H à la fois, et isomorphe à S, en procédant de la manière suivante. Soit

$$f = \varphi_2^{-1} \circ \varphi_1 \colon X \longrightarrow Y\,.$$

Alors f est une bijection d'ensembles. On pose alors

$$T = \left(X \coprod Y \right) /\!\sim$$

où $x \sim f(x)$. Très concrètement, les éléments de T sont les paires $\{x, y\}$ avec $x \in X$ et $y \in Y$, vérifiant $y = f(x)$, ou ce qui revient au même, $x = f^{-1}(y)$. On a alors une bijection

$$\varphi \colon T \longrightarrow S$$

telle que $\varphi(\{x, y\}) = \varphi_1(x) = \varphi_2(y)$, sa réciproque étant $s \mapsto \{\varphi_1^{-1}(s), \varphi_2^{-1}(s)\}$.

On peut faire de T un G-ensemble par $\{x, f(x)\} \star g = \{x \star g, f(x \star g)\}$, et on peut aussi définir une action de H par $\{y, f^{-1}(y)\} \bullet h = \{y \bullet h, f^{-1}(y \bullet h)\}$. Avec ces définitions, l'application φ est compatible avec les deux actions à la fois, et T peut s'identifier à S.

Cette construction apparaît dans la démonstration qui suit (d'une manière moins explicite).

Démonstration. L'unicité est garantie par la proposition 3.5.1 (tout élément de $\pi_1(X)$ étant un produit d'éléments de $i_*(\pi_1(U))$ et $j_*(\pi_1(V))$, son action sur S, si elle est bien définie (!), est déterminée.) Voyons l'existence de cette action.

D'après la classification, il existe un revêtement $p \colon E_U \longrightarrow U$ tel que $p^{-1}(x_0)$, avec l'action de monodromie de $\pi_1(U)$, est isomorphe à S. Écrivons $\varphi_1 \colon p^{-1}(x_0) \longrightarrow S$ pour un tel isomorphisme. De même, on trouve $q \colon E_V \longrightarrow V$ tel que $q^{-1}(x_0)$ s'identifie avec l'ensemble S, muni de son action de $\pi_1(V)$, via $\varphi_2 \colon q^{-1}(x_0) \longrightarrow S$.

Considérons la restriction p_0 de p à $p^{-1}(U \cap V)$. C'est un revêtement de $U \cap V$, et $p_0^{-1}(x_0)$ est équipé de l'action de monodromie de $\pi_1(U \cap V)$. Bien sûr en tant qu'ensemble $p_0^{-1}(x_0) = p^{-1}(x_0)$, et l'isomorphisme φ_1 ci-dessus avec S est un isomorphisme de $\pi_1(U \cap V)$-ensembles, si l'on voit S comme un $\pi_1(U \cap V)$-ensemble en utilisant i_* (c'est une conséquence de la définition de l'action de monodromie).

De même, la restriction q_0 de q à $q^{-1}(U \cap V)$ est un revêtement de $U \cap V$, et la fibre $q^{-1}(x_0)$ est isomorphe à S avec l'action de $\pi_1(V)$ via j_*, à travers l'isomorphisme φ_2.

L'hypothèse de la proposition sur la compatibilité des deux actions garantit alors que
$$\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1 \colon p_0^{-1}(x_0) \longrightarrow q_0^{-1}(x_0) \tag{*}$$
est un isomorphisme de $\pi_1(U \cap V)$-ensembles. Par l'équivalence de catégories que l'on a établie, qui s'applique car $U \cap V$ est connexe et localement contractile, il existe un homéomorphisme $f \colon p^{-1}(U \cap V) \longrightarrow q^{-1}(U \cap V)$ compatible avec p et q, et qui induit (*) sur les fibres.

On considère alors $E_U \cup_f E_V$, une notation standard pour dire qu'on prend d'abord l'union disjointe $E_U \coprod E_V$, puis ensuite
$$E_U \cup_f E_V := (E_U \coprod E_V)/\!\sim,$$
où $\sim$ est la relation d'équivalence qui associe x à $f(x)$, pour $x \in p^{-1}(U \cap V)$. On a pris la topologie quotient sur $E := E_U \cup_f E_V$. On peut alors voir E_U et E_V comme des ouverts dans E.

On vérifie alors sans problème l'existence d'une application $r \colon E \longrightarrow X$ dont les restrictions à E_U et E_V sont exactement p et q respectivement. Cette application r est donc un revêtement, puisque p et q le sont, et que la condition est locale. La fibre $r^{-1}(x_0)$ est en bijection avec S, d'une façon qui est compatible à la fois avec l'action de $\pi_1(U)$, et avec celle de $\pi_1(V)$. (C'est l'ensemble T de la remarque qui précède la démonstration.)

L'action de monodromie de $\pi_1(X)$ sur $r^{-1}(x_0)$ donne une action qui étend les deux autres. $\square$

Traditionnellement, on énonce :

Théorème 6.6.2 (Van Kampen). *On reprend les notations ci-dessus. Soit Γ un groupe quelconque. On suppose qu'on a des homomorphismes*
$$\varphi_1 \colon \pi_1(U) \longrightarrow \Gamma$$
et
$$\varphi_2 \colon \pi_1(V) \longrightarrow \Gamma$$

tels que $\varphi_1 \circ k_* = \varphi_2 \circ \ell_*$. *Alors il existe un homomorphisme unique*

$$\varphi \colon \pi_1(X) \longrightarrow \Gamma$$

tel que $\varphi \circ i_* = \varphi_1$ *et* $\varphi \circ j_* = \varphi_2$.

Il est important de noter que, si $\varphi \colon \pi_1(X) \longrightarrow \Gamma$ est un homomorphisme donné et si $\varphi_1 := \varphi \circ i_*$, $\varphi_2 := \varphi \circ j_*$, alors la relation $i_* \circ k_* = j_* \circ \ell_*$ que l'on a observée plus haut impose que $\varphi_1 \circ k_* = \varphi_2 \circ \ell_*$. Le théorème donne, en quelque sorte, la réciproque, en affirmant que cette condition suffit à l'existence de φ.

Démonstration. On fait agir $\pi_1(U)$ sur Γ par $\gamma \star g = \gamma\varphi_1(g)$ (multiplication dans le groupe Γ). De même, on fait agir $\pi_1(V)$ sur Γ par φ_2. D'après la proposition précédente, il y a une action de $\pi_1(X)$ sur Γ qui prolonge ces deux actions.

Pour chaque $g \in \pi_1(X)$ et chaque $\gamma \in \Gamma$ l'élément $\gamma \cdot g$ doit être de la forme $\gamma\varphi(g)$ pour un certain élément $\varphi(g) \in \Gamma$: en effet c'est vrai si g est dans $i_*(\pi_1(U))$ ou si g est dans $j_*(\pi_1(V))$, et on sait que ces deux sous-groupes engendrent $\pi_1(X)$.

Le fait même que l'on a une action à droite signifie que φ est un homomorphisme, et les conclusions sont évidentes. (L'unicité aussi.) □

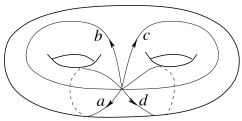
L'énoncé lui-même, d'un point de vue algébrique, est plein de mystères : il n'est pas immédiat que cette propriété caractérise complètement $\pi_1(X)$, et pourtant c'est le cas. Dans la suite du chapitre, on explore ces idées (c'est uniquement de l'algèbre, sans rapport direct avec la topologie).

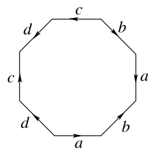
Exemple 6.6.3. Retournons à l'exemple 3.5.2, dont on reprend les notations. On sait donc que $G := \pi_1(X)$ est engendré par x et y. Le théorème de Van Kampen, dans ce cas très précis où $\pi_1(U \cap V) = \{1\}$, et $\pi_1(U) \cong \pi_1(V) \cong \mathbf{Z}$, affirme ceci : soit Γ un groupe quelconque, et soient $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ arbitraires, alors il existe un unique $\varphi \colon G \longrightarrow \Gamma$ tel que $\varphi(x) = \gamma_1$ et $\varphi(y) = \gamma_2$.

Dans la partie suivante, on va étudier cette situation algébrique plus en détail, mais on peut commencer par des remarques simples. On voit aussitôt que $xy \neq yx$; en effet, dans le cas contraire, on en déduirait $\gamma_1\gamma_2 = \gamma_2\gamma_1$, pour tout γ_1, γ_2 dans tout Γ, et tout les groupes du monde seraient abéliens !

De la même manière, toute relation entre x et y serait vraie entre γ_1 et γ_2 arbitraires, et on se convainc qu'il n'y a donc *aucune* relation du tout. On va rendre ça rigoureux dans la partie suivante, bien sûr. On dit parfois que G est *libre sur* x *et* y, ou que c'est *le groupe libre sur deux générateurs.*

Exemple 6.6.4. Prenons maintenant pour X une « surface de genre 2 » (définition 2.1.7), c'est-à-dire que X est obtenu à partir d'un octogone K avec les identifications sur le bord comme ceci :





Prenons pour U l'intérieur de K, c'est un ouvert qui s'identifie à un ouvert de X. Pour V, prenons $X - \{0\}$, où on a écrit 0 pour le point au centre de K (ou plutôt, pour son image dans X). Alors U est contractile, donc son π_1 est trivial. Quant à V, il se rétracte sur un espace formé de 4 cercles tangents (faire un dessin). En procédant comme dans l'exemple précédent, mais avec 4 cercles au lieu de 2, on montre que $\pi_1(V)$ est engendré par 4 éléments a, b, c, d. La proposition montre que $\pi_1(X)$ est engendré par $x = j_*(a)$, $y = j_*(b)$, $z = j_*(c)$ et $t = j_*(d)$.

Cette fois-ci, on peut montrer qu'il y a des relations entre ces éléments. En effet, prenons un lacet qui est « proche » du bord de K, et qui longe ce bord dans le sens des aiguilles d'une montre ; appelons r (comme « relation ») son image dans $\pi_1(U \cap V)$ (un point-base a été choisi une fois pour toutes dans $U \cap V$). On a $k_*(r) = 1$ évidemment puisque $\pi_1(U)$ est trivial, et $\ell_*(r) = aba^{-1}b^{-1}cdc^{-1}d^{-1}$, voir le dessin. On obtient

$$i_* \circ k_*(r) = 1 = j_* \circ \ell_*(r) = xyx^{-1}y^{-1}ztz^{-1}t^{-1} ,$$

donc une relation non-triviale entre x, y, z et t.

Ensuite, on note que $U \cap V$ a le type d'homotopie d'un cercle, donc $\pi_1(U \cap V) \cong \mathbf{Z}$, et plus précisément, l'élément r que nous venons d'examiner est un générateur. La conclusion de Van Kampen dans ce cas est la suivante. Soit Γ un groupe quelconque, et soient $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4 \in \Gamma$ arbitraires. Si on suppose que $\gamma_1\gamma_2\gamma_1^{-1}\gamma_2^{-1}\gamma_3\gamma_4\gamma_3^{-1}\gamma_4^{-1} = 1$, alors il existe un unique homomorphisme $\varphi\colon \pi_1(X) \longrightarrow \Gamma$ tel que $\varphi(x) = \gamma_1$, $\varphi(y) = \gamma_2$, $\varphi(z) = \gamma_3$, $\varphi(t) = \gamma_4$.

On a bien envie de dire que la relation $xyx^{-1}y^{-1}ztz^{-1}t^{-1}$ est la seule faisant intervenir x, y, z, t. On note parfois

$$\pi_1(X) = \langle x, y, z, t \mid xyx^{-1}y^{-1}ztz^{-1}t^{-1} = 1 \rangle .$$

Cette notaton va être élucidée ci-dessous.

6.7. Produits amalgamés de groupes

En guise d'épilogue, voici des éclaicissements purement algébriques sur la situation rencontrée dans le théorème de Van Kampen. Au passage, les choses deviennent plus explicites.

Définition 6.7.1. Soient A, B et C des groupes, et soient $i\colon A \longrightarrow B$ et $j\colon A \longrightarrow C$ des homomorphismes. On dit qu'un groupe G est *le produit amalgamé de B et C au-dessus de A* lorsque qu'il existe des homomorphisme $\iota_B\colon B \longrightarrow G$ et $\iota_C\colon C \longrightarrow G$ tels que $\iota_B \circ i = \iota_C \circ j$, et ayant la propriété suivante. Pour tout groupe Γ et toute paire d'homomorphismes $\varphi_B\colon B \longrightarrow \Gamma$ et $\varphi_C\colon C \longrightarrow \Gamma$ vérifiant $\varphi_B \circ i = \varphi_C \circ j$, il existe un unique homomorphisme $\varphi\colon G \longrightarrow \Gamma$ tel que $\varphi \circ \iota_B = \varphi_B$ et $\varphi \circ \iota_C = \varphi_C$. Voir la figure ci-dessous.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "j"'] & B \arrow[d, "\iota_B"] \arrow[ddr, bend left, "\varphi_B"] & \\
C \arrow[r, "\iota_C"] \arrow[drr, bend right, "\varphi_C"'] & G \arrow[dr, dotted, "\varphi"] & \\
& & \Gamma
\end{tikzcd}$$

Remarques 6.7.2.

1. Cette définition signifie que G est, en un sens, le « plus petit » groupe tel qu'on peut former un carré commutatif avec A, B et C.
2. Le théorème de Van Kampen affirme donc que $\pi_1(X)$ est le produit amalgamé de $\pi_1(U)$ et $\pi_1(V)$ au-dessus de $\pi_1(U \cap V)$, sous ses hypothèses (attention au changement de notations, k_* et ℓ_* sont devenus i et j, alors que i_* et j_* sont devenus ι_B et ι_C). Nous allons maintenant en déduire une description plus concrète de $\pi_1(X)$.

Le lemme suivant n'est pas du tout trivial.

Lemme 6.7.3. *Étant donnés A, B, C, i et j comme ci-dessus, le groupe G existe et est unique à isomorphisme près.*

On note alors $G = B *_A C$. Par exemple

$$\pi_1(X) = \pi_1(U) *_{\pi_1(U \cap V)} \pi_1(V)$$

dans la situation de Van Kampen.

Démonstration. L'unicité de G est facile, comme pour tous les objets vérifiant une « propriété universelle ». En effet, soient G et G' satisfaisant la définition. Comme $\iota'_B \circ i = \iota'_C \circ j$, on a une application φ_1 qui fait commuter le diagramme ci-dessus avec $\Gamma = G'$. De même il existe φ_2 faisant commuter un diagramme avec G remplacé par G' et Γ par G. Mais alors, la composée $\varphi_2 \circ \varphi_1$ fait commuter un diagramme encore similaire, avec $\Gamma = G$ apparaissant deux fois, et $\varphi_B = \iota_B$,

$\varphi_C = \iota_C$. Par unicité, on doit avoir $\varphi_2 \circ \varphi_1 =$ l'identité. De même pour $\varphi_1 \circ \varphi_2$. Donc G et G' sont isomorphes.

Pour l'existence, commençons par le cas où A est le groupe trivial, et décrivons le groupe $B{*}C$, le « produit libre » de B et C. Un *mot* est un n-uplet $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ avec $x_i \in B \cup C$. Soit M l'ensemble de tous les mots, pour tous les n, y compris le mot vide pour $n = 0$. On a une opération de juxtaposition sur M, la composition de $m_1 = (x_1, \ldots, x_n)$ et $m_2 = (y_1, \ldots, y_m)$ étant $m_1 \cdot m_2 = (x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$. Cette multiplication donne une structure de monoïde associatif sur M, l'élément neutre étant le mot vide.

Soit $\sim$ la relation d'équivalence sur M *engendrée* par les relations suivantes. Si $(x_1, \ldots, x_n)$ a la propriété que x_i et x_{i+1} sont tous les deux dans B, ou dans C, pour un certain indice i, alors

$$(x_1, \ldots, x_n) \sim (x_1, \ldots, x_i x_{i+1}, \ldots, x_n)\,.$$

De plus, si $x_k = 1$ pour un indice k on a

$$(x_1, \ldots, x_n) \sim (x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n)\,.$$

Si $m_1 \sim m_1'$ et $m_2 \sim m_2'$, il est clair que $m_1 \cdot m_2 \sim m_1' \cdot m_2'$. Il y a donc une multiplication sur le quotient $M/{\sim}$. Or ce quotient est un groupe et pas seulement un monoïde, puisque l'inverse de $(x_1, \ldots, x_n)$ est donné par $(x_n^{-1}, \ldots, x_1^{-1})$: en effet

$$(x_1, \ldots, x_n, x_n^{-1}, \ldots, x_1^{-1}) \sim \text{ mot vide}\,.$$

On pose alors $B{*}C = M/{\sim}$. Pour $x \in B$ on note $\iota_B(x)$ l'élément x vu comme (la classe d'équivalence d') un mot de longueur 1 dans $M/{\sim}$. De même pour $\iota_C(x)$ pour $x \in C$. Il est immédiat que ι_B et ι_C sont des homomorphismes. L'existence et l'unicité de φ faisant commuter le diagramme ci-dessus sont évidentes : on définit d'abord $\widetilde{\varphi}\colon M \longrightarrow \Gamma$ qui envoie $(x_1, \ldots, x_n)$ sur le produit $\varphi_1(x_1) \cdots \varphi_n(x_n)$ où $\varphi_i = \varphi_B$ si $x_i \in B$ et $\varphi_i = \varphi_C$ sinon, et on vérifie la compatibilité avec $\sim$.

Pour le cas général de $B{*_A}C$, on prend $(B{*}C)/N$, où N est le plus petit sous-groupe distingué de $B * C$ contenant les éléments $\iota_B(x)\iota_C(x)^{-1}$ pour $x \in A$. $\square$

Remarque 6.7.4. Dans de nombreux livres, la démonstration de ce lemme est plus longue. C'est parce que nous avons fait l'économie d'une description complète de $B * C$. Disons qu'un mot $(x_1, \ldots, x_n)$ est *réduit* si chaque $x_i \neq 1$, et si pour chaque paire (x_i, x_{i+1}) ces deux éléments ne sont pas dans le même groupe, B ou C. Il est alors clair que chaque élément du groupe $M/{\sim}$ peut être représenté par un mot réduit. Mais il est beaucoup moins clair que ce mot est unique ! C'est pourtant le cas, et comme rien n'est gratuit nous devons maintenant prendre le temps de montrer le lemme suivant.

L'idée de mettre une loi de groupe directement sur l'ensemble des mots réduits semble bonne, mais il est très pénible de vérifier l'associativité, par exemple.

Lemme 6.7.5. *Chaque élément de $B * C$ est représenté par un unique mot réduit.*

Démonstration. Soit X l'ensemble des mots réduits. Faisons agir B sur X par

$$b \cdot (x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} (bx_1, x_2, \ldots, x_n) & \text{si } x_1 \in B \text{ et } bx_1 \neq 1\,, \\ (x_2, \ldots, x_n) & \text{si } b = x_1^{-1}\,, \\ (b, x_1, x_2, \ldots, x_n) & \text{si } x_1 \in C\,. \end{cases}$$

(Et $b \cdot \emptyset = (b)$.)

On vérifie que c'est bien une action, d'où un homomorphisme $B \longrightarrow Aut(X)$. De même on a une action de C et un homomorphisme $C \longrightarrow Aut(X)$. La propriété caractéristique des produits libres nous donne donc un homomorphisme $B * C \longrightarrow Aut(X)$, et donc une action de $B * C$ sur X qui « prolonge » celles de B et C.

Soit m un mot réduit et g l'élément correspondant de $B * C$. Il est alors immédiat que $g \cdot \emptyset = m$ (la partie non-triviale était seulement de montrer que l'action est bien définie). On peut donc retrouver m à partir de g, d'où l'unicité. $\square$

Exemple 6.7.6. L'exemple le plus important est sans doute celui de $\mathbf{Z} * \mathbf{Z}$, qu'on note en général F_2. Pour bien y voir on a besoin de prendre deux « copies » de $\mathbf{Z}$ distinctes, et de travailler en notation multiplicative (puisque, nous allons le voir, $\mathbf{Z} * \mathbf{Z}$ n'est pas commutatif). Soient donc $\langle a \rangle$ et $\langle b \rangle$ deux groupes cycliques infinis, et soit $F(a, b) = \langle a \rangle * \langle b \rangle$. Chaque élément de $F(a, b)$ est donné par un mot réduit, comme par exemple (en ne mettant pas de parenthèses puisque nous pensons aux éléments du groupe)

$$a^{k_1} b^{k_2} a^{k_3} b^{k_4} \cdots a^{k_{n-1}} b^{k_n}$$

avec chaque $k_i \neq 0$, et en alternant les a et les b. Bien sûr un mot réduit peut aussi finir par une puissance de a, où commencer par une puissance de b, ou les deux. Avec le mot vide, nous venons de lister tous les types de mots réduits.

Le groupe $F(a, b)$ possède la propriété suivante. Si α et β sont deux éléments d'un groupe Γ, alors il existe un unique homomorphisme $F(a, b) \longrightarrow \Gamma$ qui envoie a sur α et b sur β. On dit que F_2, ou $F(a, b)$, est le groupe libre sur deux générateurs.

Il est facile de vérifier l'associativité $\mathbf{Z} * (\mathbf{Z} * \mathbf{Z}) = (\mathbf{Z} * \mathbf{Z}) * \mathbf{Z}$, et ce groupe, noté F_3, est appelé le groupe libre sur 3 générateurs. Par une récurrence on définit le groupe libre sur n générateurs (le groupe libre sur un générateur est $\mathbf{Z}$). Par Van Kampen, il s'agit du groupe fondamental d'un bouquet de n cercles.

Exemple 6.7.7. Retournous à des exemples topologiques. Au cours de la description de $B *_A C$ dans la démonstration du lemme 6.7.3 (dernière phrase), nous avons vu que ce groupe est la quotient du produit libre $B * C$ par le sous-groupe distingué engendré par les éléments de la forme $\iota_B(x)\iota_C(x)^{-1}$ pour $x \in A$. Dans une situation « à la Van Kampen », on a donc $\pi_1(X)$ présenté comme le quotient du produit libre $\pi_1(U) * \pi_1(V)$ par le sous-groupe engendré par les $k_*(x)\ell_*(x)^{-1}$ pour $x \in \pi_1(U \cap V)$. Bien sûr, il est intuitif qu'un tel élément doit être trivial dans $\pi_1(X)$: un lacet dans $U \cap V$ donne deux lacets, dans $\pi_1(U)$ et dans $\pi_1(V)$, mais dans $\pi_1(X)$ ces deux lacets sont confondus. Finalement Van Kampen affirme que ces relations « évidentes » sont les seules nécessaires pour bâtir $\pi_1(X)$ à partir de $\pi_1(U)$ et $\pi_1(V)$.

Explorons quelques exemples où U est contractile, dans la veine du 6.6.4. Alors le théorème affirme, on le comprend maintenant, que $\pi_1(X) = \pi_1(V)/R$, où R est le groupe distingué engendré par l'image de $\pi_1(U \cap V)$ dans $\pi_1(V)$. Dans l'exemple 6.6.4, le groupe fondamental de V est libre sur 4 générateurs x, y, z, t, et R est engendré (comme groupe distingué) par la relation $[x, y][z, t] = 1$. On note en général

$$\pi_1(X) = \langle x, y \mid [x, y][z, t] = 1 \rangle \,.$$

Si on essaie avec le tore (donc encore un quotient de polygône, mais pas avec le même « mot » sur le bord), on trouve

$$\pi_1(S^1 \times S^1) = \langle x, y \mid [x, y] = 1 \rangle \cong \mathbf{Z}^2 \,,$$

alors qu'avec la bouteille de Klein on obtient

$$\pi_1(K) = \langle x, y \mid xyx^{-1}x = 1 \rangle \cong \mathbf{Z} \rtimes \mathbf{Z} \,.$$

(Vérifiez ce qui se passe pour $\mathbf{R}P^2$, attention !)