

La conjecture Matching-Jack et la b-conjecture

Houcine Ben Dali

Université de Lorraine, CNRS, IECL, Nancy
Université de Paris, CNRS, IRIF, Paris

Journées de Combinatoire
Strasbourg, 5 Novembre 2021

Cartes

Cartes

- Une carte est le plongement unicellulaire d'un graphe sur une surface, **orientable ou pas**. Une carte est orientable si la surface sous-jacente l'est.
- Une carte est biparti si ses sommets sont coloriés en blanc et noir, et si toute arête lie deux sommets de couleurs différentes.

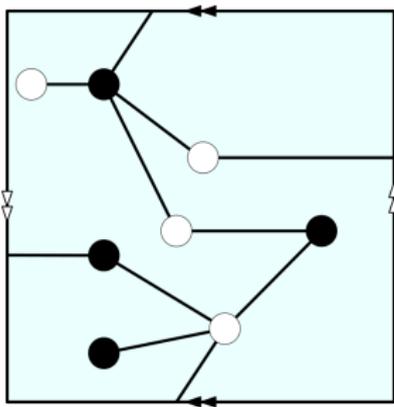


Figure 1: Une carte non orientable sur la bouteille de Klein.

Cartes

- $(\Lambda^\diamond(M), \Lambda^\circ(M), \Lambda^\bullet(M))$ est le profil de la carte bipartie M , où $\Lambda^\diamond(M)$ est la partition qui donne les degrés des faces divisés par 2, et $\Lambda^\circ(M)$ (resp. $\Lambda^\bullet(M)$) est la partition dont les parts sont les degrés des sommets blancs (resp. noirs).

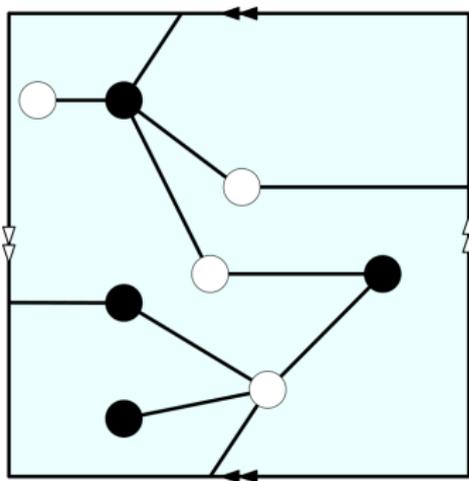


Figure 1: Une carte non-orientable avec profil $([9], [4, 2, 2, 1], [4, 2, 2, 1])$.

Marking d'une carte

On introduit trois alphabets

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots); \quad \mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots); \quad \mathbf{z} = (z_1, z_2, \dots),$$

et les fonctions power-sum associées

$$\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots); \quad \mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots); \quad \mathbf{r} = (r_1, r_2, \dots),$$

$$\text{où } p_k := \sum_{i \geq 1} x_i^k; \quad q_k := \sum_{i \geq 1} y_i^k; \quad r_k := \sum_{i \geq 1} z_i^k.$$

Si $\lambda := [\lambda_1, \dots, \lambda_\ell]$ est une partition alors

$$p_\lambda := p_{\lambda_1} p_{\lambda_2} \dots p_{\lambda_\ell}; \quad q_\lambda := q_{\lambda_1} q_{\lambda_2} \dots q_{\lambda_\ell}; \quad r_\lambda := r_{\lambda_1} r_{\lambda_2} \dots r_{\lambda_\ell}$$

Marking d'une carte:

On associe

- à une face de degré $2m$ un marking p_m
- à un sommet blanc (resp. noir) de degré m un marking q_m (resp. r_m).

\implies Une carte M de profil $(\Lambda^\diamond(M), \Lambda^\circ(M), \Lambda^\bullet(M))$ a pour marking $p_{\Lambda^\diamond(M)} q_{\Lambda^\circ(M)} r_{\Lambda^\bullet(M)}$.

Marking d'une carte:

On associe

- à une face de degré $2m$ un marking p_m
- à un sommet blanc (resp. noir) de degré m un marking q_m (resp. r_m).

\implies Une carte M de profil $(\Lambda^\diamond(M), \Lambda^\circ(M), \Lambda^\bullet(M))$ a pour marking $p_{\Lambda^\diamond(M)} q_{\Lambda^\circ(M)} r_{\Lambda^\bullet(M)}$.

Remarque

Le genre de la carte est donné par la formule d'Euler:

$$g(M) := 1/2(n + 2 - \ell(\Lambda^\diamond(M)) - \ell(\Lambda^\circ(M)) - \ell(\Lambda^\bullet(M))).$$

Série génératrice des cartes biparties orientables

Cartes orientables étiquetées

Une carte orientable de taille n est étiquetée si ses arêtes sont étiquetées par $1, \dots, n$.

Exemple:

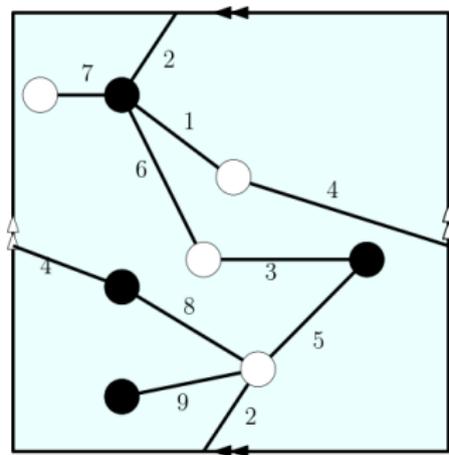
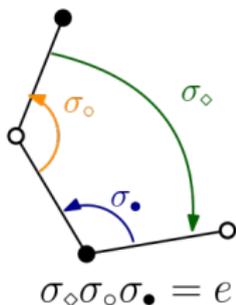


Figure 2: Une carte bipartie orientable étiquetée sur le tore.

Encodage des cartes orientables avec des permutations.

On associe à une carte orientable étiquetée M trois permutations:



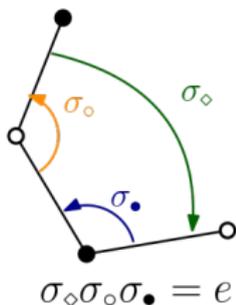
σ_{\circ} permet de tourner autour des sommets blancs.

σ_{\bullet} permet de tourner autour des sommets noirs.

σ_{\diamond} permet de longer les faces.

Encodage des cartes orientables avec des permutations.

On associe à une carte orientable étiquetée M trois permutations:



σ_{\circ} permet de tourner autour des sommets blancs.

σ_{\bullet} permet de tourner autour des sommets noirs.

σ_{\diamond} permet de longer les faces.

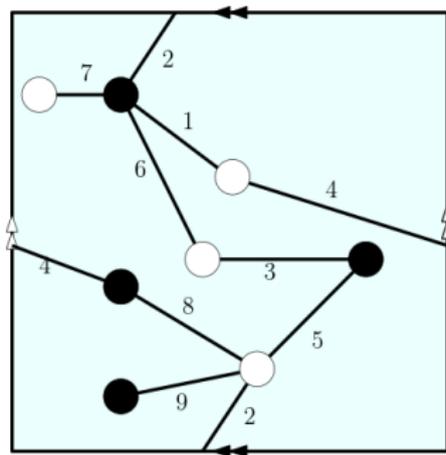
$$\text{type}(\sigma_{\circ}) = \Lambda^{\circ}(M).$$

$$\text{type}(\sigma_{\bullet}) = \Lambda^{\bullet}(M).$$

$$\text{type}(\sigma_{\diamond}) = \Lambda^{\diamond}(M)$$

Encodage des cartes orientables avec des permutations.

Exemple:



$$\sigma_{\circ} = (1, 4)(2, 5, 8, 9)(3, 6)(7),$$

$$\sigma_{\bullet} = (1, 2, 7, 6)(3, 5)(4, 8)(9),$$

$$\sigma_{\diamond} = (1, 8, 3, 7, 2, 9, 4, 6, 5).$$

Cartes orientables biparties

1 Pour tout triplet de partitions (λ, μ, ν) , on a une bijection

Cartes orientables étiquetées de profil (λ, μ, ν)	\longleftrightarrow	Factorisations de l'identité $(\sigma_{\diamond}, \sigma_{\circ}, \sigma_{\bullet})$ tels que les types cycliques de σ_{\diamond} , σ_{\circ} et σ_{\bullet} sont respectivement λ , μ et ν .
---	-----------------------	---

Cartes orientables biparties

1 Pour tout triplet de partitions (λ, μ, ν) , on a une bijection

Cartes orientables étiquetées de profil (λ, μ, ν)	\longleftrightarrow	Factorisations de l'identité $(\sigma_{\diamond}, \sigma_{\circ}, \sigma_{\bullet})$ tels que les types cycliques de σ_{\diamond} , σ_{\circ} et σ_{\bullet} sont respectivement λ , μ et ν .
---	-----------------------	---

2 [Théorie des représentations de \mathfrak{S}_n]

$$\sum_{\theta} t^{|\theta|} \frac{|\theta|!}{\dim(\theta)} s_{\theta}(\mathbf{p}) s_{\theta}(\mathbf{q}) s_{\theta}(\mathbf{r}) = \sum_{n \geq 0} \frac{t^n}{n!} \sum_{\sigma_{\diamond} \sigma_{\circ} \sigma_{\bullet} = \theta \in \mathfrak{S}_n} p_{\text{type}(\sigma_{\diamond})} q_{\text{type}(\sigma_{\circ})} r_{\text{type}(\sigma_{\bullet})},$$

s_{θ} : la fonction de Schur associée à la partition θ , exprimée dans les power-sums, $\mathbf{p} := (p_i)_{i \geq 1}$; $\mathbf{q} := (q_i)_{i \geq 1}$; ; $\mathbf{r} := (r_i)_{i \geq 1}$.

Cartes orientables biparties

1 Pour tout triplet de partitions (λ, μ, ν) , on a une bijection

Cartes orientables \longleftrightarrow Factorisations de l'identité
 étiquetées de profil $(\sigma_{\diamond}, \sigma_{\circ}, \sigma_{\bullet})$ tels que les types
 (λ, μ, ν) cycliques de $\sigma_{\diamond}, \sigma_{\circ}$ et σ_{\bullet} sont respectivement λ, μ et ν .

2 [Théorie des représentations de \mathfrak{S}_n]

$$\sum_{\theta} t^{|\theta|} \frac{|\theta|!}{\dim(\theta)} s_{\theta}(\mathbf{p}) s_{\theta}(\mathbf{q}) s_{\theta}(\mathbf{r}) = \sum_{n \geq 0} \frac{t^n}{n!} \sum_{\sigma_{\diamond} \sigma_{\circ} \sigma_{\bullet} = \theta \in \mathfrak{S}_n} p_{\text{type}(\sigma_{\diamond})} q_{\text{type}(\sigma_{\circ})} r_{\text{type}(\sigma_{\bullet})},$$

s_{θ} : la fonction de Schur associée à la partition θ , exprimée dans les power-sums, $\mathbf{p} := (p_i)_{i \geq 1}$; $\mathbf{q} := (q_i)_{i \geq 1}$; ; $\mathbf{r} := (r_i)_{i \geq 1}$.

■ [Classique]

$$\frac{t \partial}{\partial t} \log \left(\sum_{\theta} t^{|\theta|} \frac{|\theta|!}{\dim(\theta)} s_{\theta}(\mathbf{p}) s_{\theta}(\mathbf{q}) s_{\theta}(\mathbf{r}) \right) = \sum_{\substack{M \text{ carte connexe} \\ \text{enracinée orientable}}} t^{|M|} p_{\Lambda^{\circ}(M)} q_{\Lambda^{\bullet}(M)} r_{\Lambda^{\diamond}(M)}.$$

Série génératrice des cartes biparties non-orientables

Cartes non-orientables étiquetées

- Une carte non-orientable est étiquetée si les côtés de ses arêtes sont étiquetés avec $\mathcal{A}_n := \{1, \hat{1}, \dots, n, \hat{n}\}$.
- Exemple:

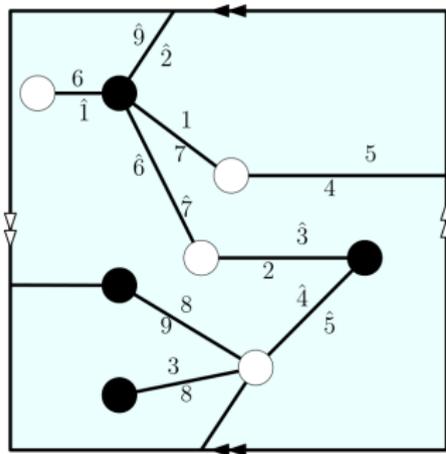


Figure 3: Une carte étiquetée sur la bouteille de Klein.

Matchings

- Un matching δ sur $\mathcal{A}_n = \{1, \hat{1}, \dots, n, \hat{n}\}$ est un graphe 1-régulier.

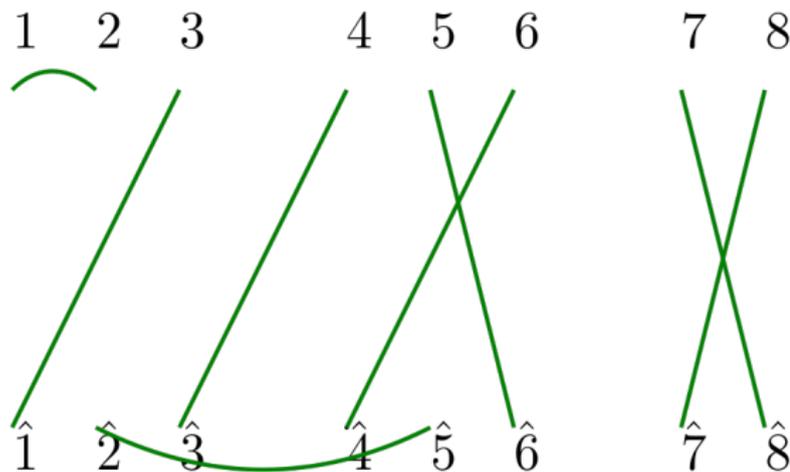


Figure 4: Un exemple de matching sur \mathcal{A}_8 .

Matchings

- Un matching est biparti si chacune de ses paires est de la forme (i, \hat{j}) .

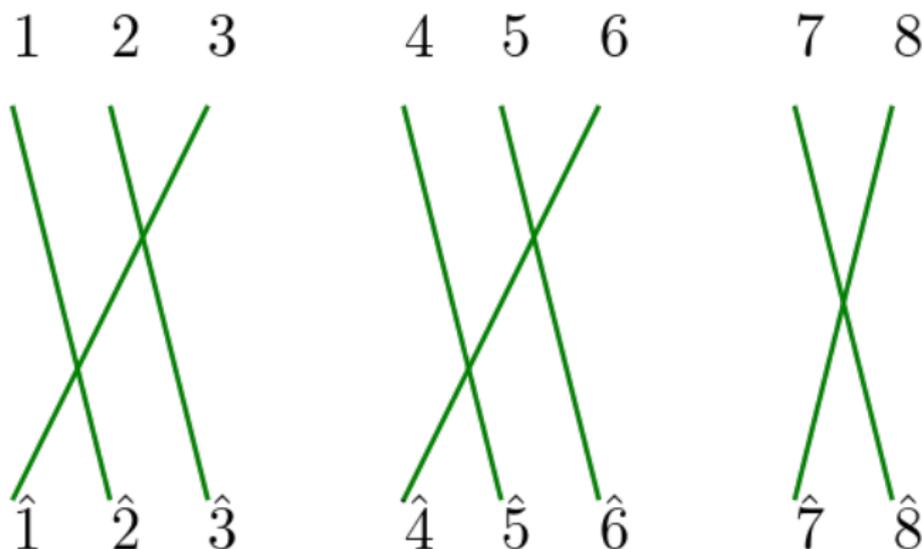


Figure 4: Un exemple de matching biparti sur \mathcal{A}_8 .

Matchings

- Pour $n \geq 1$, le matching ε est le matchings biparti sur \mathcal{A}_n formé par les paires (i, \hat{i}) .

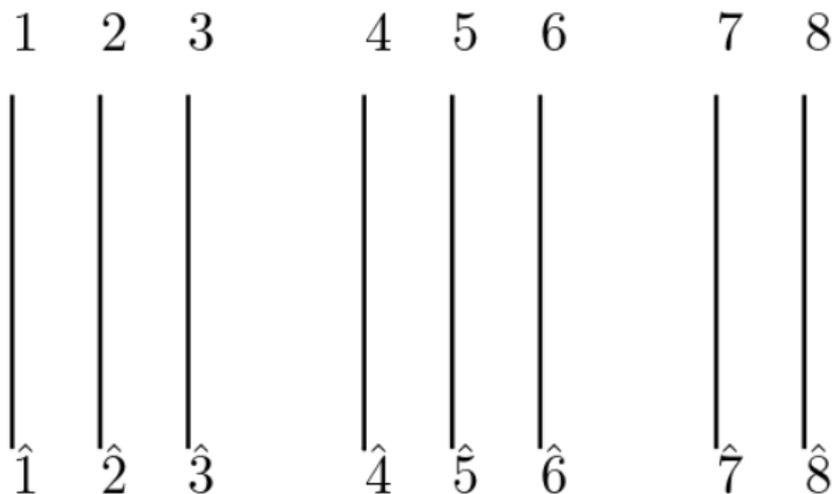


Figure 4: Le matching ε sur \mathcal{A}_8 .

Matchings

- Pour deux matchings δ et δ' de \mathcal{A}_n , on définit $\Lambda(\delta, \delta')$ comme la partition dont les parts sont les moitiés des tailles des composantes connexes du graphe $\delta \cup \delta'$.
- On fixe pour toute partition λ un matching biparti δ_λ tel que $\Lambda(\varepsilon, \delta_\lambda) = \lambda$.

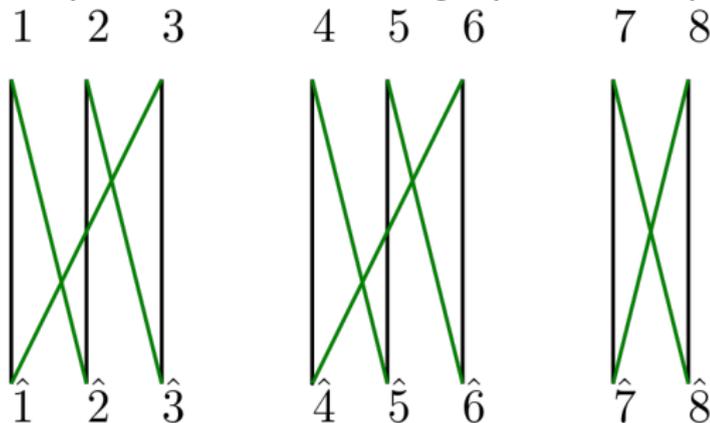
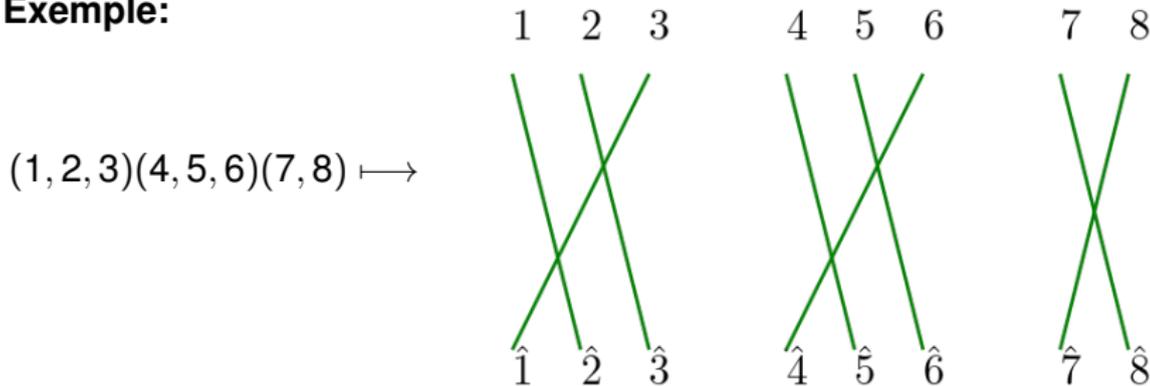


Figure 4: Un exemple du graphe $\varepsilon \cup \delta_\lambda$ pour $\lambda = [3, 3, 2]$

Matchings

- On a une bijection entre les permutations de \mathfrak{S}_n et les matchings bipartis de $\mathcal{A}_n : \sigma \mapsto$ le matching formé par les paires $(i, \hat{\sigma}(j))$.
- **Exemple:**

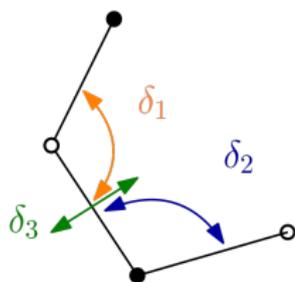


Remarque

Une permutation de type cyclique λ s'envoie sur un matching δ tel que $\Lambda(\varepsilon, \delta) = \lambda$.

Encodage des cartes biparties avec des matchings

On associe à une carte bipartie étiquetée M trois matchings;



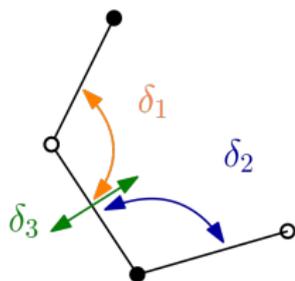
δ_1 relie les étiquettes de deux côtés formant un coin blanc.

δ_2 relie les étiquettes de deux côtés formant un coin noir.

δ_3 relie les étiquettes de deux côtés d'une même arête.

Encodage des cartes biparties avec des matchings

On associe à une carte bipartie étiquetée M trois matchings;



δ_1 relie les étiquettes de deux côtés formant un coin blanc.

δ_2 relie les étiquettes de deux côtés formant un coin noir.

δ_3 relie les étiquettes de deux côtés d'une même arête.

$$\Lambda(\delta_1, \delta_2) = \Lambda^\diamond(M).$$

$$\Lambda(\delta_1, \delta_3) = \Lambda^\circ(M).$$

$$\Lambda(\delta_2, \delta_3) = \Lambda^\bullet(M).$$

Série Génératrice des cartes biparties

non-orientables [Goulden and Jackson '96]

1 On a une bijection :

Cartes étiquetées de profil (λ, μ, ν) \longleftrightarrow Triplets de matchings $(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$ tels que $\Lambda(\delta_1, \delta_2) = \lambda$, $\Lambda(\delta_1, \delta_3) = \mu$, et $\Lambda(\delta_2, \delta_3) = \nu$.

2 [Théorie des représentations de la paire de Gelfand $(\mathfrak{S}_{2n}, \mathfrak{B}_n)$]

$$\sum_{\theta} t^{|\theta|} \frac{\dim(2\theta)}{|2\theta|!} Z_{\theta}(\mathbf{p}) Z_{\theta}(\mathbf{q}) Z_{\theta}(\mathbf{r}) = \sum_{n \geq 0} \frac{t^n}{(2n)!} \sum_{\substack{\delta_0, \delta_1, \delta_2 \\ \text{matchings de } \mathcal{A}_n}} p_{\Lambda(\delta_0, \delta_1)} q_{\Lambda(\delta_1, \delta_2)} r_{\Lambda(\delta_1, \delta_2)}$$

Z_{θ} : Polynôme zonal associé à la partition θ , exprimé dans la base power-sum.

Série Génératrice des cartes biparties

non-orientables [Goulden and Jackson '96]

1 On a une bijection :

Cartes étiquetées de profil (λ, μ, ν) \longleftrightarrow Triplets de matchings $(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$ tels que $\Lambda(\delta_1, \delta_2) = \lambda$, $\Lambda(\delta_1, \delta_3) = \mu$, et $\Lambda(\delta_2, \delta_3) = \nu$.

2 [Théorie des représentations de la paire de Gelfand $(\mathfrak{S}_{2n}, \mathfrak{B}_n)$]

$$\sum_{\theta} t^{|\theta|} \frac{\dim(2\theta)}{|2\theta|!} Z_{\theta}(\mathbf{p}) Z_{\theta}(\mathbf{q}) Z_{\theta}(\mathbf{r}) = \sum_{n \geq 0} \frac{t^n}{(2n)!} \sum_{\substack{\delta_0, \delta_1, \delta_2 \\ \text{matchings de } \mathcal{A}_n}} p_{\Lambda(\delta_0, \delta_1)} q_{\Lambda(\delta_1, \delta_2)} r_{\Lambda(\delta_1, \delta_2)}$$

Z_{θ} : Polynôme zonal associé à la partition θ , exprimé dans la base power-sum.

3

$$2 \frac{t \partial}{\partial t} \log \left(\sum_{\theta} t^{|\theta|} \frac{\dim(2\theta)}{|2\theta|!} Z_{\theta}(\mathbf{p}) Z_{\theta}(\mathbf{q}) Z_{\theta}(\mathbf{r}) \right) = \sum_{\substack{M \text{ cartes} \\ \text{connexes enracinées}}} t^{|M|} p_{\Lambda^{\circ}(M)} q_{\Lambda^{\bullet}(M)} r_{\Lambda^{\circ}(M)}$$

Polynômes de Jack et une déformation à un paramètre de la série génératrice des cartes biparties

Polynômes de Jack

On considère la déformation suivante du produit scalaire de Hall, définie sur l'algèbre des fonctions symétriques par

$$\langle p_\lambda, p_\mu \rangle_b = \delta_{\lambda\mu} z_\lambda (1+b)^{\ell(\lambda)}.$$

Polynômes de Jack

On considère la déformation suivante du produit scalaire de Hall, définie sur l'algèbre des fonctions symétriques par

$$\langle p_\lambda, p_\mu \rangle_b = \delta_{\lambda\mu} z_\lambda (1+b)^{\ell(\lambda)}.$$

Définition

Les polynômes de Jack de paramètre $1+b$, notés $J_\lambda^{(b)}$, sont définis par:

- 1 Triangularité et normalisation: si $\lambda \vdash n$, alors

$$J_\lambda^{(b)} = \sum_{\mu \vdash n, \mu \leq \lambda} u_{\lambda\mu} m_\mu,$$

avec $u_{\lambda[1^n]} = n!$.

(Ordre de dominance $\mu \leq \lambda : \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_i \leq \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_i \forall i$)

- 2 Orthogonalité: si $\lambda \neq \mu$ alors $\langle J_\lambda^{(b)}, J_\mu^{(b)} \rangle_b = 0$.

Polynômes de Jack

- Pour $b = 0 \longrightarrow$ fonctions de Schur $J_\lambda^{(0)} = \frac{|\lambda|!}{\dim(\lambda)} \mathbf{s}_\lambda$.
- Pour $b = 1 \longrightarrow$ polynômes zonaux $J_\lambda^{(1)} = Z_\lambda$.

On définit

$$\tau_b(t, \mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}) := \sum_{\theta} \frac{t^{|\theta|}}{j_\theta^{(b)}} J_\theta^{(b)}(\mathbf{p}) J_\theta^{(b)}(\mathbf{q}) J_\theta^{(b)}(\mathbf{r}),$$

où $j_\theta^{(b)} = \langle J_\theta^{(b)}, J_\theta^{(b)} \rangle_b$.

$b=0$

$$\tau_0(t, \mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}) = \sum_{n \geq 0} \sum_{\lambda \vdash n} \frac{t^n}{z_\lambda} \sum_{\substack{\delta \text{ matching} \\ \text{biparti sur } \mathcal{A}_n}} p_\lambda q_{\Lambda(\varepsilon, \delta)} r_{\Lambda(\delta_\lambda, \delta)}.$$

$$\frac{t \partial}{\partial t} \log(\tau_0(t, \mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r})) = \sum_{\substack{M \text{ cartes connexes} \\ \text{enracinées orientables}}} t^{|M|} p_{\Lambda^\circ(M)} q_{\Lambda^\circ(M)} r_{\Lambda^\bullet(M)}.$$

b=0

$$\tau_0(t, \mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}) = \sum_{n \geq 0} \sum_{\lambda \vdash n} \frac{t^n}{z_\lambda} \sum_{\substack{\delta \text{ matching} \\ \text{biparti sur } \mathcal{A}_n}} p_\lambda q_{\Lambda(\varepsilon, \delta)} r_{\Lambda(\delta_\lambda, \delta)}.$$

$$\frac{t \partial}{\partial t} \log(\tau_0(t, \mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r})) = \sum_{\substack{M \text{ cartes connexes} \\ \text{enracinées orientables}}} t^{|M|} p_{\Lambda^\circ(M)} q_{\Lambda^\circ(M)} r_{\Lambda^\bullet(M)}.$$

b=1

$$\tau_1(t, \mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}) = \sum_{n \geq 0} \sum_{\lambda \vdash n} \frac{t^n}{z_\lambda 2^{\ell(\lambda)}} \sum_{\substack{\delta \text{ matching} \\ \text{sur } \mathcal{A}_n}} p_\lambda q_{\Lambda(\varepsilon, \delta)} r_{\Lambda(\delta_\lambda, \delta)}.$$

$$2 \frac{t \partial}{\partial t} \log(\tau_1(t, \mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r})) = \sum_{\substack{M \text{ cartes connexes} \\ \text{enracinées}}} t^{|M|} p_{\Lambda^\circ(M)} q_{\Lambda^\circ(M)} r_{\Lambda^\bullet(M)}.$$

Conjectures de Goulden et Jackson '96

La conjecture Matching-Jack

$$\tau_b(t, \mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}) = \sum_{n \geq 0} \sum_{\lambda \vdash n} \frac{t^n}{z_\lambda (1+b)^{\ell(\lambda)}} \sum_{\delta \text{ matching sur } \mathcal{A}_n} b^{\vartheta_\lambda(\delta)} p_\lambda q_{\Lambda(\varepsilon, \delta)} r_{\Lambda(\delta_\lambda, \delta)},$$

où pour toute partition $\lambda \vdash n$, ϑ_λ est une fonction sur \mathcal{A}_n à valeurs dans les entiers positifs, tel que $\vartheta_\lambda(\delta) = 0$ ssi δ est un matching biparti.

Conjectures de Goulden et Jackson '96

La conjecture Matching-Jack

$$\tau_b(t, \mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}) = \sum_{n \geq 0} \sum_{\lambda \vdash n} \frac{t^n}{z_\lambda (1+b)^{\ell(\lambda)}} \sum_{\delta \text{ matching sur } \mathcal{A}_n} b^{\vartheta_\lambda(\delta)} p_\lambda q_{\Lambda(\varepsilon, \delta)} r_{\Lambda(\delta_\lambda, \delta)},$$

où pour toute partition $\lambda \vdash n$, ϑ_λ est une fonction sur \mathcal{A}_n à valeurs dans les entiers positifs, tel que $\vartheta_\lambda(\delta) = 0$ ssi δ est un matching biparti.

La b -conjecture

$$(1+b) \frac{t \partial}{\partial t} \log(\tau_b(t, \mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r})) = \sum_{\substack{M \text{ cartes connexes} \\ \text{enracinées}}} t^{|M|} b^{\vartheta(M)} p_{\Lambda^\circ(M)} q_{\Lambda^\circ(M)} r_{\Lambda^\bullet(M)},$$

où ϑ est une fonction sur les cartes connexes enracinées à valeurs dans les entiers positifs, telle que $\vartheta(M) = 0$ ssi M est orientable.

Quelques résultats partiels

Théorème (Dołęga-Féray '15)

Le coefficient de $p_\lambda q_\mu r_\nu$ dans $\tau_b(t, \mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r})$ multiplié par $z_\lambda(1+b)^{\ell(\lambda)}$ est un **polynôme** en b à coefficients rationnels.

Théorème (Dołęga-Féray '17)

Le coefficient de $p_\lambda q_\mu r_\nu$ dans la fonction $(1+b)^{\frac{t\partial}{\partial t}} \log(\tau_b(t, \mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}))$ est un **polynôme** en b à coefficients rationnels.

Quelques résultats partiels

Théorème (Chapuy-Dołęga '20)

$$(1 + b) \frac{t \partial}{\partial t} \log(\tau_b(t, \mathbf{p}, \mathbf{q}, \underline{u})) = \sum_{\substack{M \text{ cartes connexes} \\ \text{enracinées}}} t^{|M|} b^{\vartheta(M)} p_{\Lambda^\circ(M)} q_{\Lambda^\circ(M)} u^{\ell(\Lambda^\bullet(M))}$$

où ϑ est une fonction sur les cartes connexes enracinées à valeurs dans les entiers positifs, telle que $\vartheta(M) = 0$ ssi M est orientable.

$$\underline{u} := (u, u, u \dots).$$

Quelques résultats partiels

Théorème (B.D. '21, arXiv:2106.15414)

$$\tau_b(t, \mathbf{p}, \mathbf{q}, \underline{u}) = \sum_{n \geq 0} \sum_{\lambda \vdash n} \frac{t^n}{z_\lambda (1+b)^{\ell(\lambda)}} \sum_{\delta \text{ matching sur } \mathcal{A}_n} b^{\vartheta_\lambda(\delta)} p_\lambda q_{\Lambda(\varepsilon, \delta)} u^{\ell(\Lambda(\delta_\lambda, \delta))},$$

où pour toute partition $\lambda \vdash n$, ϑ_λ est une fonction sur \mathcal{A}_n à valeurs dans les entiers positifs, tel que $\vartheta_\lambda(\delta) = 0$ ssi δ est un matching biparti.

$$\underline{u} := (u, u, u \dots).$$

Quelques résultats partiels

Théorème (B.D. '21, arXiv:2106.15414)

$$\tau_b(t, \mathbf{p}, \mathbf{q}, \underline{u}) = \sum_{n \geq 0} \sum_{\lambda \vdash n} \frac{t^n}{z_\lambda (1 + \mathbf{b})^{\ell(\lambda)}} \sum_{\delta \text{ matching sur } \mathcal{A}_n} b^{\vartheta_\lambda(\delta)} p_\lambda q_{\Lambda(\varepsilon, \delta)} u^{\ell(\Lambda(\delta_\lambda, \delta))},$$

où pour toute partition $\lambda \vdash n$, ϑ_λ est une fonction sur \mathcal{A}_n à valeurs dans les entiers positifs, tel que $\vartheta_\lambda(\delta) = 0$ ssi δ est un matching biparti.

$\underline{u} := (u, u, u \dots)$.

Remarque

Tous les résultats précédents se généralisent aux k -constellations.

Rappel:

Théorème (Dołęga-Féray '15)

Le coefficient de $p_\lambda q_\mu r_\nu$ dans la fonction $\tau_b(t, \mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r})$ multiplié par $z_\lambda(1+b)^{\ell(\lambda)}$ est un polynôme en b à coefficients rationnels.

Rappel:

Théorème (Dołęga-Féray '15)

Le coefficient de $p_\lambda q_\mu r_\nu$ dans la fonction $\tau_b(t, \mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r})$ multiplié par $z_\lambda(1+b)^{\ell(\lambda)}$ est un polynôme en b à coefficients rationnels.

Théorème (B.D.)

*Le coefficient de $p_\lambda q_\mu r_\nu$ dans la fonction $\tau_b(t, \mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r})$ multiplié par $z_\lambda(1+b)^{\ell(\lambda)}$ est un polynôme en b à coefficients **entiers**.*

Preuve: L'intégralité des coefficients de $\tau_b(t, \mathbf{p}, \mathbf{q}, \underline{u})$ + un lien avec l'algèbre de Farahat-Higman.