Structures tridendriformes sur les faces des associaèdres d'hypergraphes

Bérénice Delcroix-Oger
avec Jovana Obradovic (Institut de Mathématiques de l'Académie des Sciences de Serbie) et Pierre-Louis Curien (CNRS-IRIF, Université de Paris)

Journées du GT CombAlg
Strasbourg, Vendredi 5 Novembre 2021

Outline

1. Prologue
2. Polytopes d'hypergraphes (a.k.a. nestoèdres)
3. Structures algébriques sur les polytopes d'hypergraphes

Prologue

Plan d'attaque

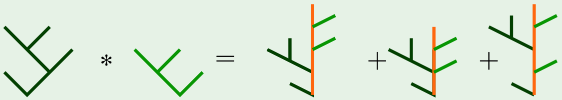
1. Prologue
2. Polytopes d'hypergraphes (a.k.a. nestoèdres)
3. Structures algébriques sur les polytopes d'hypergraphes

Algèbres tridendriformes [Loday-Ronco, 2004; Chapoton, 2002]

Exemple

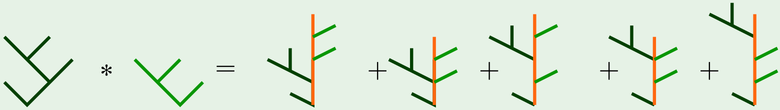
Algèbres tridendriformes [Loday-Ronco, 2004; Chapoton, 2002]

Exemple



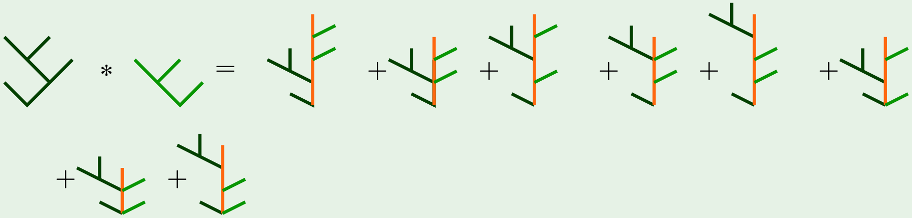
Algèbres tridendriformes [Loday-Ronco, 2004; Chapoton, 2002]

Exemple



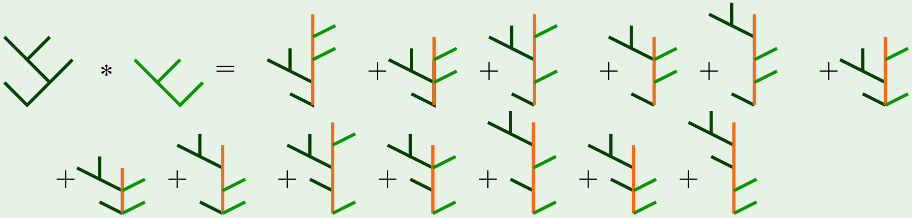
Algèbres tridendriformes [Loday-Ronco, 2004; Chapoton, 2002]

Exemple



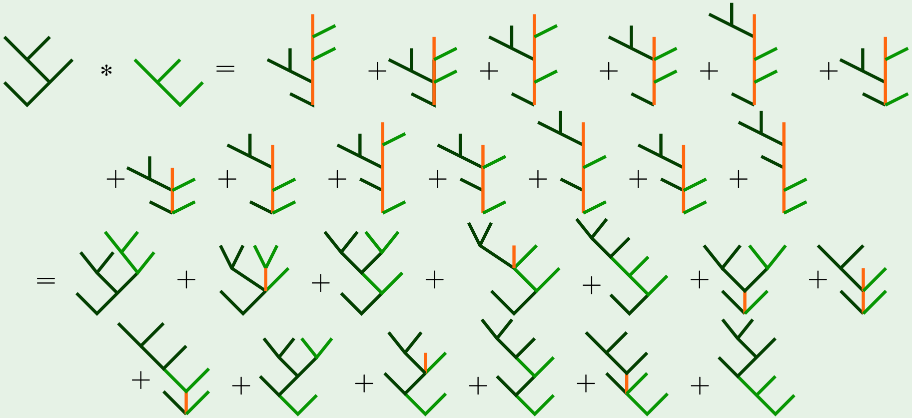
Algèbres tridendriformes [Loday-Ronco, 2004; Chapoton, 2002]

Exemple



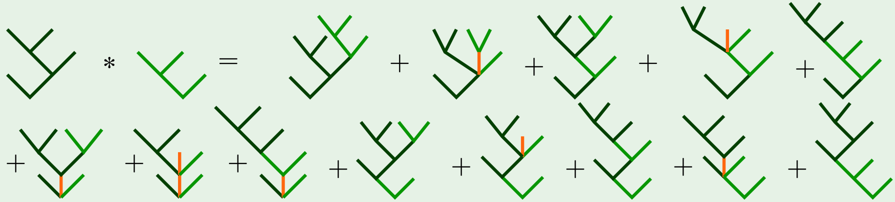
Algèbres tridendriformes [Loday-Ronco, 2004; Chapoton, 2002]

Exemple



Algèbres tridendriformes [Loday-Ronco, 2004; Chapoton, 2002]

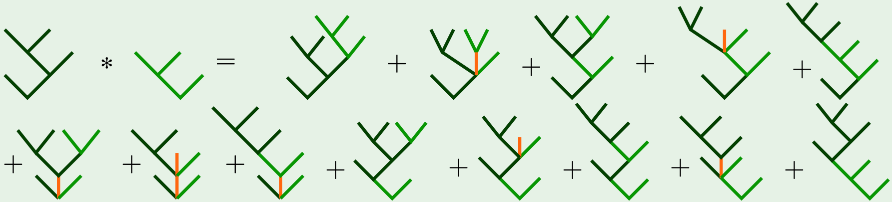
Exemple



Produit $*$ associatif, algèbre associée libre mais engendrée par une infinité de générateurs [Vong, 2015; Burgunder-Curien-Ronco, 2016]

Algèbres tridendriformes [Loday-Ronco, 2004; Chapoton, 2002]

Exemple



Produit $*$ associatif, algèbre associée libre mais engendrée par une infinité de générateurs [Vong, 2015; Burgunder-Curien-Ronco, 2016]

Solution :

Trois types d'arbres (suivant la racine) : pourquoi ne pas couper le produit $*$ en trois ?

Définition récursive des produits tridendriformes sur les arbres

Si $T = t_l \vee t_r$ and $S = s_l \vee s_r$,

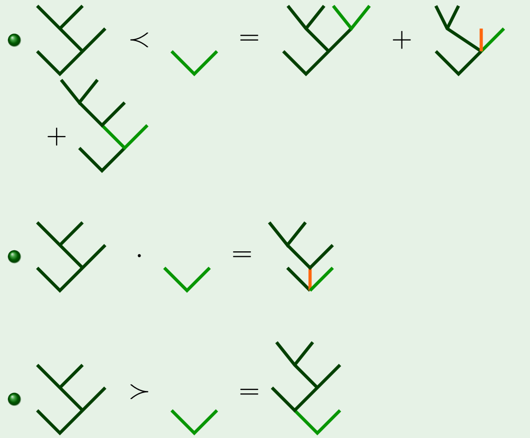
$$T \prec S = t_l \vee (t_r * S)$$

$$T \cdot S = t_l \vee (t_r * s_l) \vee s_r$$

et

$$T \succ S = (T * s_l) \vee s_r$$

Exemples :



Algèbre tridendriforme (définition équationnelle)

Definition (Loday, Ronco, 2004 ; Chapoton 2002)

Une algèbre tridendriforme est un e.v. A muni de $\prec: A \otimes A \to A$, $\cdot : A \otimes A \to A$ et $\succ: A \otimes A \to A$, tels que :

1. $(a \prec b) \prec c = a \prec (b * c)$,
2. $(a * b) \succ c = a \succ (b \succ c)$,
3. $(a \succ b) \prec c = a \succ (b \prec c)$,
4. $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$,
5. $(a \succ b) \cdot c = a \succ (b \cdot c)$,
6. $(a \prec b) \cdot c = a \cdot (b \succ c)$,
7. $(a \cdot b) \prec c = a \cdot (b \prec c)$,

avec $* = \prec + \cdot + \succ$

Algèbre sur les surjections WQSym [Duchamp-Hivert-Novelli-Thibon, 2011]

$$u \# v = \sum_{\substack{\mathrm{pack}(\alpha)=u \\ \mathrm{pack}(\beta)=v \\ c_\#}} \alpha\beta,$$

où $c_\# = \min(\alpha) < \min(\beta)$ pour $\# = \prec$,
$c_\# = \min(\alpha) = \min(\beta)$ pour $\# = \cdot$,
et $c_\# = \min(\alpha) > \min(\beta)$ pour $\# = \succ$.

Exemple :

$$11 \succ 221 = 22221 + 33221 + 22331$$
$$11 \cdot 221 = 11221$$
$$11 \prec 221 = 11332$$

Algèbre sur les surjections WQSym [Duchamp-Hivert-Novelli-Thibon, 2011]

$$u \# v = \sum_{\substack{\mathrm{pack}(\alpha)=u \\ \mathrm{pack}(\beta)=v \\ c_\#}} \alpha\beta,$$

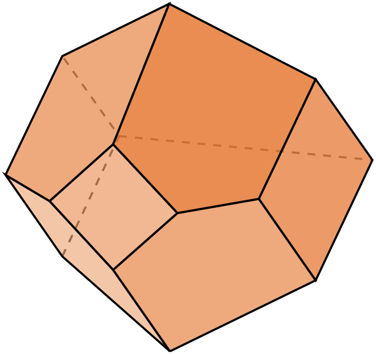
où $c_\# = \min(\alpha) < \min(\beta)$ pour $\# = \prec$,
$c_\# = \min(\alpha) = \min(\beta)$ pour $\# = \cdot$,
et $c_\# = \min(\alpha) > \min(\beta)$ pour $\# = \succ$.

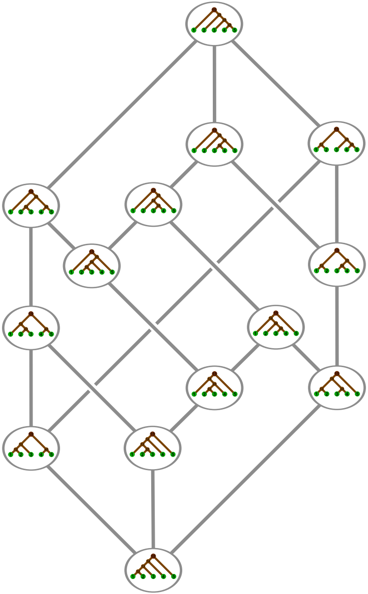
Exemple :

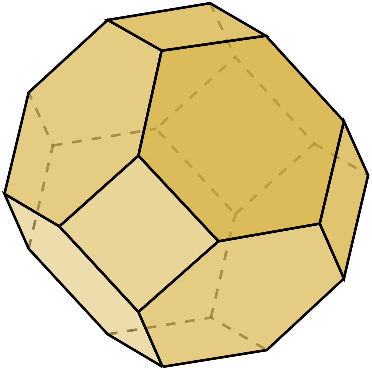
$$11 \succ 221 = 22221 + 33221 + 22331$$
$$11 \cdot 221 = 11221$$
$$11 \prec 221 = 11332$$

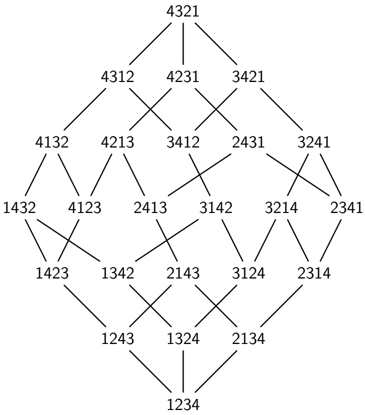
Produits tridendriformes $\Rightarrow$ WQSym algèbre tridendriforme libre sur une infinité de générateurs

Lien avec les associaèdres et les permutoèdres








4321
4312
4231
3421
4132
4213
3412
2431
3241
1432
4123
2413
3142
3214
2341
1423
1342
2143
3124
2314
1243
1324
2134
1234

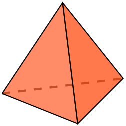
Polytopes d'hypergraphes (a.k.a. nestoèdres)

Plan d'attaque

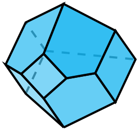
1 Prologue

2 Polytopes d'hypergraphes (a.k.a. nestoèdres)

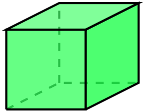
3 Structures algébriques sur les polytopes d'hypergraphes



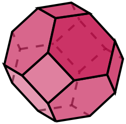
Simplexes



Associaèdres



Hypercubes



Permutoèdres

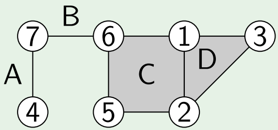
Hypergraphes

Définition

Un hypergraphe (de sommets V) est un couple (V, E) où :

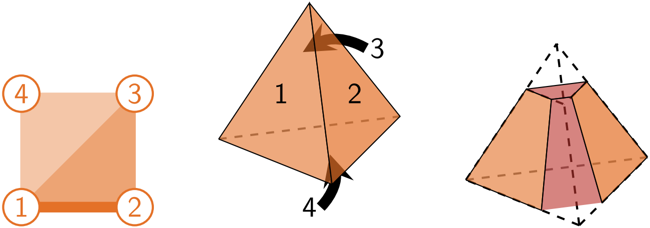
- V est un ensemble fini, (ensemble de sommets)
- E est un ensemble d'ensembles d'au moins 2 sommets, $E \subset \mathcal{P}(V)$.

Exemple d'un hypergraphe sur $[\![1;7]\!]$



.

Polytope d'hypergraphe [Dosen, Petric] (=nestoèdres [Postnikov])



Constructions [Postnikov; Curien-Ivanovic-Obradovic]

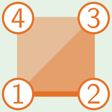
Constructions

La construction d'un hypergraphe H est définie récursivement. Pour $E \in V(H)$ (l'ensemble des sommets de H),

- Si $E = V(H)$, la construction associée est l'arbre enraciné sur un sommet de racine E,
- Sinon, notant $(T_1, \ldots, T_n)$ des constructions de chacune des composantes connexes de $H - E$, une construction de l'hypergraphe tout entier peut être obtenue en greffant ces arbres sur une racine étiquetée E.

L'ensemble des constructions étiquette les faces des polytopes.

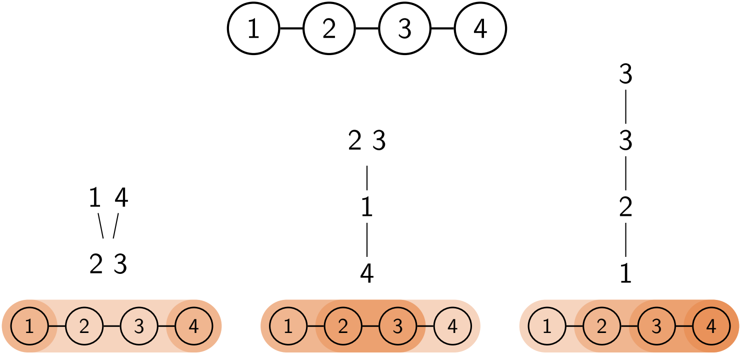
Premier exemple:




```
                        2      1    2 1   1 2   3 2   3 1
                        |      |    \ /   \ /   \ /   \ /
 →   4 3 2    4 3 1    4 1    4 2    3     3     1     2     4 3    4 2
     \ | /    \ | /    \ /    \ /    |     |     |     |     \ /    \ /
       1        2       3      3     4     4     4     4     1,2    1,3
```

Un peu de pratique

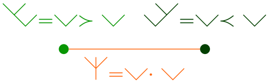
Correspondance Tubages = Constructions = Épines



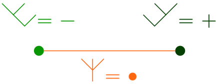
Interprétation combinatoire des constructions

Simplexe À une face $\{a_1, \ldots, a_k\}$ de dimension k est associé l'ensemble multipointé $(V(H), \{a_1, \ldots, a_k\})$

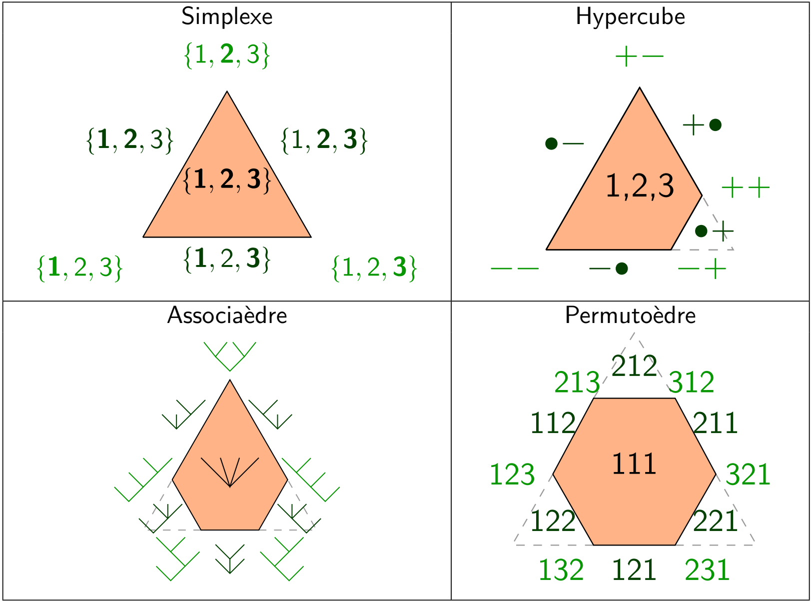
Associaèdre À chaque face est associée un arbre plan



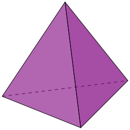
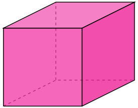
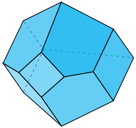
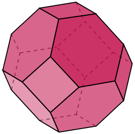
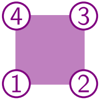
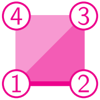
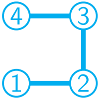
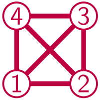
Cube À une face de dimension k est associé l'ensemble des mots de longueur $n-1$ sur $+$, $-$ et $\bullet$ avec k $\bullet$ (ou des arbres peignés à gauche)



Permutoèdre À chaque face de dimension k est associée une surjection de hauteur k



Simplexe
{1, 2, 3}
{1, 2, 3}
{1, 2, 3}
{1, 2, 3}
{1, 2, 3}
{1, 2, 3}
{1, 2, 3}
Hypercube
+−
•−
+•
1,2,3
++
•+
−−
−•
−+
Associaèdre
Permutoèdre
212
213
312
112
211
111
123
321
122
221
132
121
231

Polytope	Simplexe	Hypercube	Associaèdre	Permutoèdre
Photo				
Hypergraphe associé				
Objet combinatoire	ensembles multipointés	arbres peignés gauches	arbres plans	surjections
Cardinal	$2^{n+1} - 1$ (A074909)	3^n (A013609)	Super-Catalan (A001003)	nbrs de Fubini (A000670)

Structures algébriques sur les polytopes d'hypergraphes

Plan d'attaque

1. Prologue
2. Polytopes d'hypergraphes (a.k.a. nestoèdres)
3. Structures algébriques sur les polytopes d'hypergraphes

Heuristique pour une structure tridendriforme

Soit $\mathbf{H}^{\mathcal{X}}$ une famille de polytopes d'hypergraphes indexés par des ensembles finis $\mathcal{X}$ (ensemble des sommets de l'hypergraphe associé). Pour $S = X(S_1, \ldots, S_m)$ et $T = Y(T_1, \ldots, T_n)$ deux constructions de $\mathbf{H}^{\mathcal{X}}$ et $\mathbf{H}^{\mathcal{Y}}$, respectivement ($\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ disjoint), on aimerait définir les opérations suivantes

- $S \prec T$ comme une somme de constructions de $\mathbf{H}^{\mathcal{X} \cup \mathcal{Y}}$ ayant $\mathcal{X}$ pour racine,
- $S \succ T$ comme une somme de constructions de $\mathbf{H}^{\mathcal{X} \cup \mathcal{Y}}$ ayant $\mathcal{Y}$ pour racine,
- $S \cdot T$ comme une somme de constructions de $\mathbf{H}^{\mathcal{X} \cup \mathcal{Y}}$ ayant $\mathcal{X} \cup \mathcal{Y}$ pour racine.

Structure tridendriforme associée aux simplexes [Loday-Ronco, Chapoton]

Sur le simplex, nous obtenons les produits suivants (triass), notant $(\mathcal{X}, A)$ l'ensemble des éléments de X dont les éléments de A sont pointés:

$$\begin{aligned}
(\mathcal{X}, A) \prec (\mathcal{Y}, B) &= (\mathcal{X} \cup \mathcal{Y}, A) \\
(\mathcal{X}, A) \succ (\mathcal{Y}, B) &= (\mathcal{X} \cup \mathcal{Y}, B) \\
(\mathcal{X}, A) \cdot (\mathcal{Y}, B) &= (\mathcal{X} \cup \mathcal{Y}, A \cup B)
\end{aligned}$$

Structure tridendriforme associée aux hypercubes

Cette construction appliquée à l'hypercube donne :

$$
\begin{aligned}
u \prec v &= u\,(-^{|v|}) \\
u \succ (v_1 + v_2) &= \begin{cases} (u \star v_1) + v_2 & (v_1 \neq \epsilon) \\ u + v_2 & (v_1 = \epsilon) \end{cases} \\
u \cdot (v_1 + v_2) &= u\,(-^{|v_1|}) \bullet v_2
\end{aligned}
$$

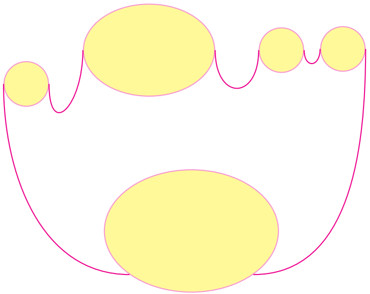
où le $+$ ci-dessous est l'occurrence la plus à droite de $+$ et un $+$ est ajouté au début de chaque mot (qui sont alors de longueur n).

Univers et pré-équipe

Les hypergraphes considérés appartiennent à un ensemble $\mathfrak{U}$, appelé univers.

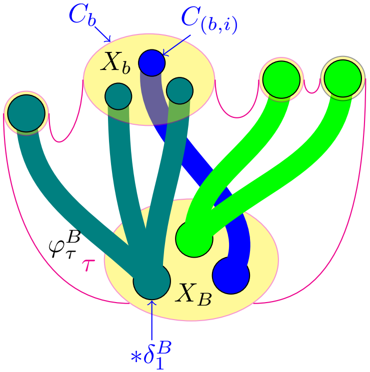
Une pré-équipe est un couple $\tau = (\{\mathbf{H}_a | a \in A\}, \mathbf{H})$ où

- $\{\mathbf{H}_a | a \in A, \mathbf{H}_a \in \mathfrak{U}\}$ est un ensemble d'hypergraphes deux à deux disjoints, appelés hypergraphes participants
- $\mathbf{H} \in \mathfrak{U}$ est un hypergraphe tel que $H = \bigcup_{a \in A} H_a$, appelé hypergraphe support.



Équipes strictes et semi-strictes

Une pré-équipe est une équipe stricte (resp. semi-stricte) si les composantes connexes obtenues en enlevant un sous-ensemble X_a de chaque hypergraphe $\mathbf{H}_a$ sont dans $\mathfrak{U}$ et sont incluses dans les composantes connexes de $\mathbf{H} \setminus (\bigcup_{a \in A} X_a)$ (resp. ou totalement déconnectées)



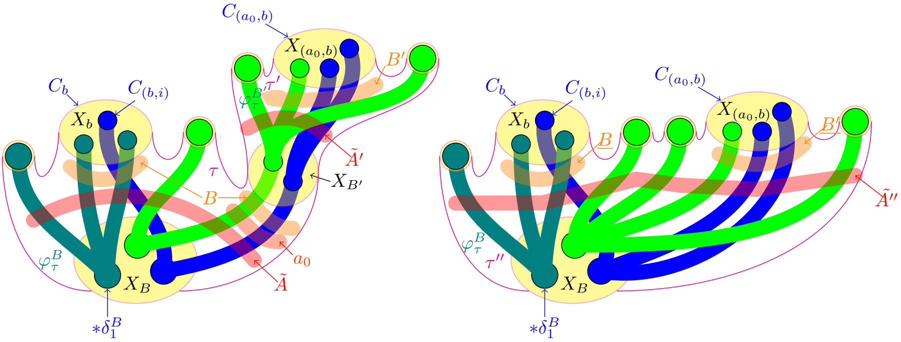
Produit

Considérant E une équipe et notant δ un uplet de constructions des hypergraphes participants de l'équipe, on associe récursivement à δ une somme de constructions de l'hypergraphe support :

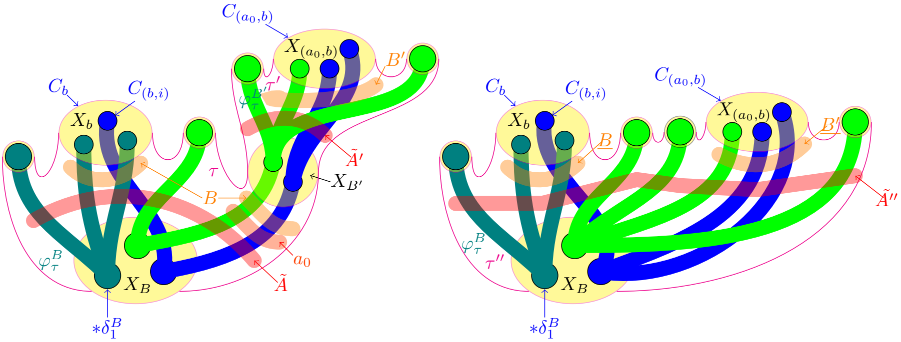
$$*(\delta) = \sum_{\emptyset \subset B \subseteq A} q^{|B|-1} \Big(\bigcup_{b \in B} X_b\Big)\big(*(\delta_1^B), \ldots, *(\delta_{n_B}^B)\big), \tag{1}$$

Clan associatif

Un ensemble d'équipes strictes (resp. semi-strictes) avec les bonnes propriétés de fermeture (chaque composante connexe issue d'une démolition d'un hypergraphe support est elle-même hypergraphe support d'une équipe) est appelé clan strict (resp. semi-strict).



Associativité de $*$



Theorème (Curien-D.O.-Obradovic, 21+)

Considérons un clan $\mathcal{C}$. Le produit $*$ défini précédemment est associatif si

- *$\mathcal{C}$ est strict,*
- *ou $\mathcal{C}$ est semi-strict et $q = -1$.*

- Clans stricts : Associaèdres, Permutoèdres, Restrictoèdres, ...
- Clans semi-stricts : Simplex, Hypercubes, Cycloèdres, ...

et le coproduit ?

Essai :

$$\Delta(S) = \sum_{\text{c coupe}} R_c(S) \otimes *(F_c(S)) + 1 \otimes S$$

Difficulté : renormalisation

Conjecture

Possible uniquement dans le cadre associaèdre et permutoèdre

Conclusion et pistes de recherche

Obtention d'un cadre général dans lequel obtenir un produit associatif et des opérations tridendriformes.

Pistes de recherche

- Opérades de polytopes (avec E. Burgunder (IMT, Toulouse) et P.-L. Curien (IRIF))
- Lien avec les ordres sur les sommets des polytopes d'hypergraphes (avec P.-L. Curien (IRIF) et J. Obradovic (Serbie))

Merci de votre attention !

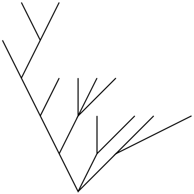


Figure: Left-combshaped trees with every non-leftmost child being the root of only corollas