

Topologie des posets

Le poset des fonctions de parking

MATTHIEU JOSUAT-VERGÈS,
BÉRÉNICE DELCROIX-OGER,
LUCAS RANDAZZO

Journées du GT combalg, Strasbourg, 2021

Posets

Définition.

Soit E un ensemble fini. Un *ordre partiel* sur E est une relation binaire \leq qui est réflexive, transitive et symétrique. On dit que E est un *poset* s'il est muni d'un ordre partiel.

Exemple.

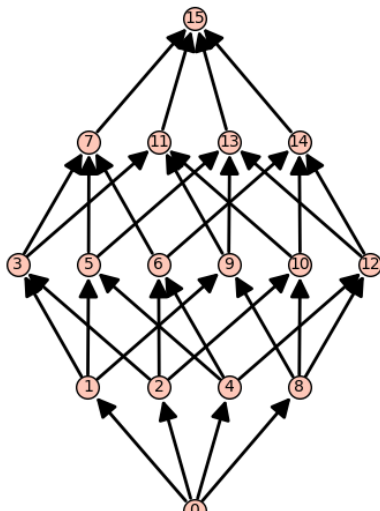
Les parties de $\{1, \dots, n\}$ ordonnées par inclusion.

Les diviseurs d'un entier n , ordonnés par divisibilité.

Posets

On le représente par son *diagramme de Hasse* : on dessine une arête de x à z si $x < z$ et $\nexists y, x < y < z$.

Exemple.



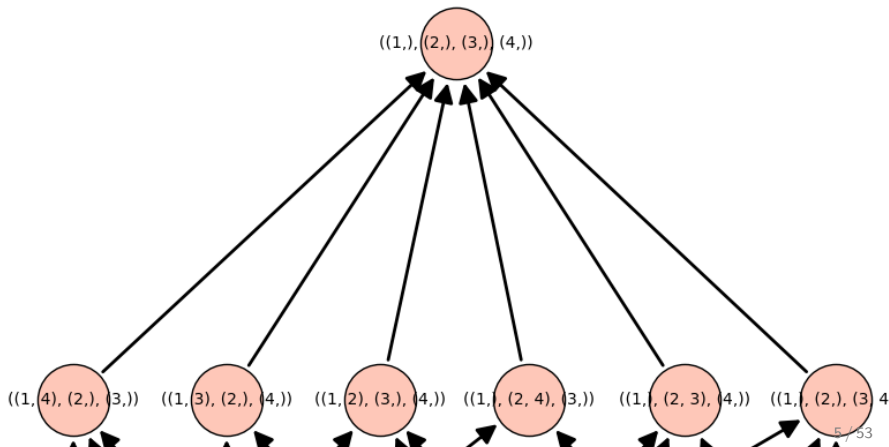
Quelques questions que l'on peut se poser sur un poset :

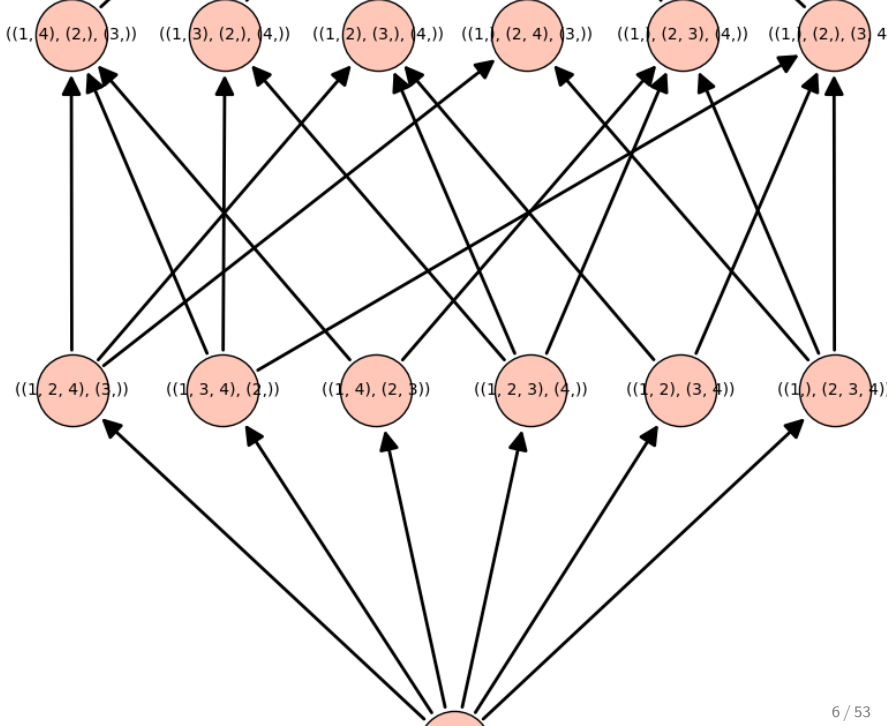
- ▶ propriétés *structurelles* : structure de treillis (existence de bornes inf/sup)...
- ▶ propriétés *énumératives* : énumération des chaînes, antichaînes...
- ▶ propriétés topologiques...

Partitions non-croisées

Exemple.

On note NC_n le poset des *partitions non-croisées* sur $\{1, \dots, n\}$, i.e., les partitions d'ensemble qui peuvent être dessinées sans croisements. La relation d'ordre est le *raffinement*.





Partitions non-croisées

On sait que NC_n est un treillis, de cardinal

$$C_n = \frac{1}{2n+1} \binom{2n+1}{n}$$

(le n ième nombre de Catalan).

Plus généralement, le nombre de chaînes croissantes $\pi_1 \leq \dots \leq \pi_k$ est le nombre de Fuß-Catalan

$$C_n^{(k)} = \frac{1}{(k+1)n+1} \binom{(k+1)n+1}{n}.$$

Espaces topologiques

Espaces topologiques

Soit E un ensemble fini. Une *topologie* sur E est un ensemble \mathcal{T} de parties de E tel que

- ▶ $\emptyset, E \in \mathcal{T}$,
- ▶ \mathcal{T} est stable par intersection et union.

Par convention, on appelle les éléments de \mathcal{T} les *parties fermées* ou *fermés* de E .

On suppose toujours qu'une topologie *sépare* les points de E , c'est-à-dire : pour $x, y \in E$ distincts, il existe $F \in \mathcal{T}$ tel que F contienne soit x , soit y (mais pas les deux).

[Finite topological spaces, cf. McCord 1966]

Espaces topologiques

Exemples : L'espace topologique *discret* est (E, \mathcal{T}) où \mathcal{T} contient toutes les parties de E .

On peut créer des espaces topologiques par produits finis $E_1 \times E_2$ ou union disjointe finie $E_1 \uplus E_2$.

$$E = \{1, 2, 3\} \text{ et } \mathcal{T} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}\}$$

Cet espace s'identifie naturellement au segment fermé $[1, 2] \subset \mathbb{R}$: on peut identifier le point $\{1\} \in E$ à $1 \in [1, 2]$ (et de même pour 2), et on identifie $\{3\}$ à un *point générique* de l'intervalle ouvert $]1, 2[$.

Espaces topologiques

Théorème. Soit un ensemble fini E . Il y a une bijection entre les topologies (séparées) \mathcal{T} sur E et les ordres partiels \leq sur E .

Définition. Un idéal d'un poset (E, \leq) est un sous-ensemble I tel que $x, y \in E$, $y \in I$, $x \leq y$ implique $x \in I$

Proposition. Les idéaux d'un poset (E, \leq) forment une topologie. Clairement, \emptyset et E sont des idéaux, il s'agit de vérifier que si I_1, I_2 sont des idéaux alors $I_1 \cup I_2$ et $I_1 \cap I_2$ aussi.

Espaces topologiques

Dans un espace topologique (E, \mathcal{T}) , pour $x \in E$, son *adhérence* $\overline{\{x\}}$ (ou \bar{x}) est le plus petit fermé qui contienne x .

Les fermés \bar{x} pour $x \in E$ sont les *fermés minimaux* de E : ils ne s'écrivent pas comme une union disjointe de fermés non vides.

Cette notion permet de définir un ordre partiel \leq sur E :

$$x \leq y \iff x \in \bar{y}.$$

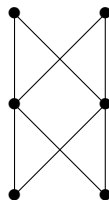
En particulier, les éléments minimaux pour \leq sont les points fermés, i.e., les $x \in E$ tels que $\bar{x} = \{x\}$.

Proposition. Cette relation \leq est un ordre partiel.

Cette construction et la précédente réalisent la bijection entre topologies et ordres partiels.

Espaces topologiques

La sphère de dimension 2,
 $S^2 \subset \mathbb{R}^3$, peut être représentée
par le poset ci-contre.



En général il faut au moins $2n + 2$ éléments pour réaliser la sphère de dimension n [Barmak, Minian, "Minimal finite models", 2007].

Complexes simpliciaux

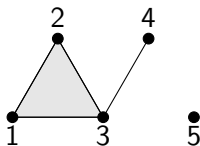
Complexes simpliciaux

Soit E un ensemble fini. Un *complexe simplicial* (sur E , çàd ayant les éléments de E comme *sommets*) est un ensemble \mathcal{F} de parties de E appelées *faces* tel que :

- ▶ pour tout $x \in E$, $\{x\} \in \mathcal{F}$,
- ▶ pour tout $f \in \mathcal{F}$, les sous-ensembles de f sont aussi dans \mathcal{F} .

Exemple.

$$\mathcal{F} = \{\emptyset, \\ \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \\ \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \\ \{1, 2, 3\}\}.$$

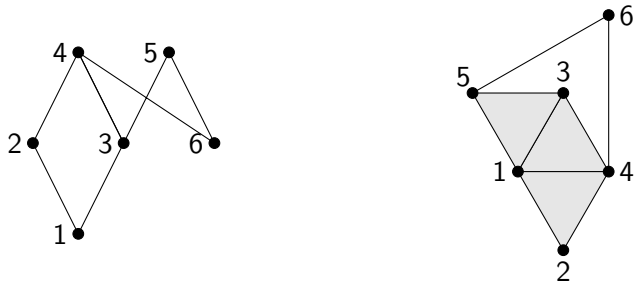


Complexe d'ordre

Soit E un poset fini. Son *complexe d'ordre* $\Omega(E)$ est le complexe simplicial :

- ▶ ayant les éléments de E pour sommets,
- ▶ les chaînes strictes d'éléments de E pour faces.

Exemple.



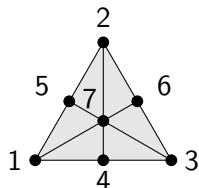
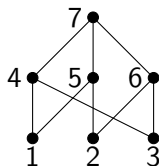
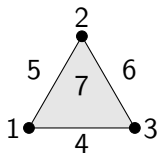
Complexe d'ordre

Théorème.

Soit \mathcal{T} une topologie sur E , et \leq l'ordre partiel correspondant via la bijection précédente. Alors (E, \mathcal{T}) est *homotopiquement équivalent* à la *réalisation géométrique* du complexe $\Omega(E, \leq)$.

On appelle $\Omega(E, \leq)$ la *subdivision barycentrique* de (E, \mathcal{T}) .


Exemple.



Complexe d'ordre

Mais $(E, \leq) \mapsto \Omega(E)$ n'est pas une bijection.

Par exemple, un poset et le poset "retourné" (par un *anti-isomorphisme*) ont le même complexe d'ordre.

Le complexe  n'est pas le complexe d'ordre d'un poset.

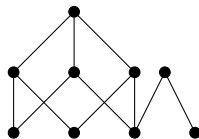
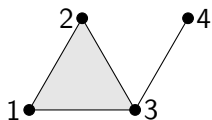
Pourtant, Ω est "presque" surjectif, au sens où pour tout complexe simplicial \mathcal{C} , il existe un poset P tel que \mathcal{C} a la même topologie que $\Omega(P)$.

Poset des faces

À un complexe simplicial \mathcal{C} on associe un poset $\Pi(\mathcal{C})$ tel que :

- ▶ ses éléments sont les faces *non vides* de \mathcal{C} ,
- ▶ la relation d'ordre est l'inclusion.

Exemple.



(Pourquoi ne pas prendre la face vide ? Si un poset P a un minimum m , alors $\Omega(P)$ est un *cône* sur $\Omega(P \setminus \{m\})$, donc $\Omega(P)$ est topologiquement trivial.)

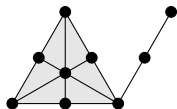
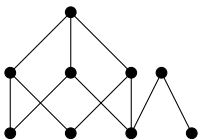
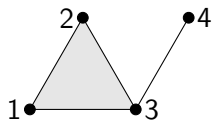
Poset des faces

Théorème.

Soit \mathcal{C} un complexe simplicial, et (E, \leq) l'espace topologique correspond au poset $\Pi(\mathcal{C})$ via la bijection précédente. Alors \mathcal{C} et (E, \leq) sont *homotopiquement équivalents*.

Plus précisément, \mathcal{C} et $\Omega(\Pi(\mathcal{C}))$ ont la même *réalisation géométrique* (qui s'interprète encore comme une subdivision barycentrique).

Exemple.



Épluchabilité

Épluchabilité

Une méthode combinatoire puissante pour déterminer la topologie d'un poset consiste à montrer qu'il est *épluchable*. Björner et Wachs ($\simeq 1980$) ont développé des méthodes générales à partir d'ordres lexicographiques pour montrer qu'un poset est épluchable.

Si un poset est épluchable, sa topologie est celle d'un *bouquet de sphères*.

Nous allons utiliser ces méthodes dans le cas des posets de partitions non-croisées et des posets de fonctions parking.

Épluchabilité

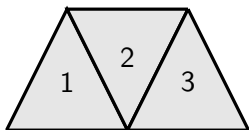
Soit \mathcal{C} un complexe simplicial, dont toutes les *facettes* (faces maximales) ont la même dimension n (le complexe est *pur*).

Définition. Supposons qu'on ait un ordre total \prec sur les facettes de $\mathcal{C} : F_1 \prec F_2 \prec F_3 \prec \dots$. C'est un *ordre épluchant* si :

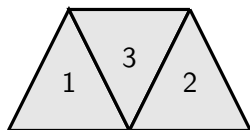
- ▶ $\forall i, \left(\bigcup_{1 \leq j \leq i-1} F_j \right) \cap F_i$ est un complexe pur de dimension $n - 1$.

Un poset P est *épluchable* s'il existe un ordre épluchant pour $\Omega(P)$.

Exemple.



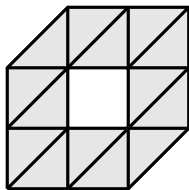
Ordre épluchant



Pas un ordre épluchant

Épluchabilité

Sur certains complexes, il n'y a aucun ordre épluchant :



Épluchabilité

Définition. Soit $k, n \geq 0$. Un *bouquet* de k sphères de dimension n est la topologie obtenue par :

- ▶ on part de k sphères distinctes de dimension n , chacune munie d'un point distingué,
- ▶ on identifie (dans un *espace quotient*) les k points distingués.

Exemple.



Bouquets de sphères de dimension 2.

Épluchabilité

Exemple.

Si \mathcal{C} est un graphe (complexe pur de dimension 1) connexe, avec f_0 sommets et f_1 arêtes, alors il a la topologie d'un bouquet de $f_1 - f_0 + 1$ sphères de dimension 1.

Théorème.

Si \mathcal{C} est pur de dimension n et épluchable, il a la topologie d'un bouquet de sphères de dimension n .

Preuve. Soit $F_1 \prec \cdots \prec F_k$ un ordre épluchant. Il suffit de faire une induction sur k . Si $\left(\bigcup_{1 \leq j \leq k-1} F_j\right) \cap F_k$ est égal à la frontière de F_k , on a rajouté une sphère de dimension n . Sinon, on peut aplatir F_k sur $\left(\bigcup_{1 \leq j \leq k-1} F_j\right) \cap F_k$ donc la topologie n'a pas changé.

Invariant de Möbius

Comment connaître le nombre de sphère dans la topologie d'un poset épluchable ?

Théorème.

Soit P un poset avec un minimum m et un maximum M , où toutes les chaînes maximales ont n éléments. Soit μ son invariant de Möbius. Si le poset $P \setminus \{m, M\}$ est épluchable, il a la topologie d'un bouquet de $|\mu|$ sphères de dimension $n - 2$.

Schéma de preuve : Soit f_i le nombre de chaînes strictes à i éléments dans $P \setminus \{m, M\}$. La *caractéristique d'Euler* de $\Omega(P \setminus \{m, M\})$ est $\sum_{i \geq 0} (-1)^i f_i$, et aussi $1 + (-1)^n b_{n-2}$ où b_{n-2} est le nombre de $n - 2$ -sphères. On relie $\sum_{i \geq 0} (-1)^i f_i$ à la fonction de Möbius par un calcul dans *l'algèbre d'incidence* du poset.

Partitions non-croisées

Partitions non-croisées

Définition.

Une partition non-croisée de $\{1, \dots, n\}$ est une partition d'ensemble de $\{1, \dots, n\}$, qui peut être dessinée sans croisement. Par exemple :



représente la partition non-croisée

$$\{\{1, 3, 4\}, \{2\}, \{5, 9\}, \{6, 7, 8\}, \{10\}\}.$$

Les partitions non-croisées de $\{1, \dots, n\}$ forment un poset NC_n , où l'ordre est la raffinement. L'élément minimal est la partition à un seul bloc, l'élément maximal est la partition à n blocs.

Partitions non-croisées

Le nombre de chaînes à k éléments dans NC_n est le nombre de Fuß-Catalan :

$$C_n^{(k)} = \frac{1}{(k+1)n+1} \binom{(k+1)n+1}{n}.$$

Théorème. Soit P un poset avec un minimum m et un maximum M . Soit ζ_P le polynôme ζ de P , i.e., $\zeta_P(k)$ est le nombre de chaînes à k éléments de P . Alors l'invariant de Möbius de P est $\zeta(P, -2)$.

Ainsi le nombre de Möbius de NC_n est $(-1)^{n-1} C_{n-1}$.

Partitions non-croisées

On peut définir les partitions non-croisées avec le groupe symétrique \mathfrak{S}_n .

Définition. Pour une partition non-croisées $\pi \in \mathcal{NC}_n$, sa *permutation non-croisée* associée est $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ telle que :

- ▶ pour chaque bloc $b = \{i_1, i_2, \dots, i_k\}$ de π , σ a un cycle (i_1, i_2, \dots, i_k) .

On a donc un poset des permutations non-croisées \mathcal{NC}_n .

Définition. Pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, soit $\ell(\sigma) = n - z(\sigma)$ où $z(\sigma)$ est le nombre de cycles de σ .

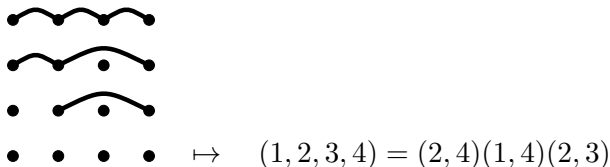
Théorème. $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ est une permutation non-croisée ssi $\ell(\sigma) + \ell(\sigma^{-1}\gamma) = n - 1$ où γ est le long cycle $(1, 2, \dots, n)$.

Partitions non-croisées

Théorème. Les chaînes maximales de permutations non-croisées sont en bijection avec les factorisations de γ en produit de $n - 1$ transpositions, via :

$$\sigma_1 \triangleleft \sigma_2 \triangleleft \sigma_3 \dots \mapsto (\sigma_2)(\sigma_2^{-1}\sigma_3), (\sigma_3^{-1}\sigma_4) \dots$$

Exemple.



Partitions non-croisées

Définition. Soit \mathcal{NC}'_n le poset \mathcal{NC}_n privé de son élément minimal et de son élément maximal.

Les chaînes maximales de \mathcal{NC}'_n sont en bijection avec les chaînes maximales de \mathcal{NC}_n .

On peut comparer deux transpositions (i, j) et (k, l) par l'ordre lexicographique : $(i, j) \prec (k, l)$ ssi $i < k$, ou $i = k$ et $j < l$.

Théorème. L'ordre lexicographique sur les factorisations de $(1, 2, 3, \dots, n)$ en produits de $n - 1$ transpositions est un ordre épiluchant pour \mathcal{NC}'_n .

Partitions non-croisées

Exemple.

Les factorisations :

$$\begin{aligned}(1, 2, 3, 4, 5) &= (1, 2)(2, 3)(3, 4)(4, 5) \\ &= (1, 2)(2, 3)(3, 5)(3, 4) \\ &= (1, 2)(2, 3)(4, 5)(3, 5) \\ &= (1, 2)(2, 4)(2, 3)(4, 5)\end{aligned}$$

...

donnent les premières facettes (de dimension 2) de $\Omega(\mathcal{NC}'_5)$:

$$\begin{aligned}&\{(1, 2), (1, 2, 3), (1, 2, 3, 4)\}, \\ &\{(1, 2), (1, 2, 3), (1, 2, 3, 5)\}, \\ &\{(1, 2), (1, 2, 3), (1, 2, 3)(4, 5)\}, \\ &\{(1, 2), (1, 2, 4), (1, 2, 3, 4)\},\end{aligned}$$

...

Un critère d'épluchabilité

Soit P un treillis. Pour tout $x \in P$, soit \prec_x un ordre total sur les éléments qui couvrent x . On peut alors définir un ordre lexicographique sur les chaînes maximales de P par

$$(x_1, \dots, x_n) \leq (y_1, \dots, y_n)$$

ssi $x_i \prec_{x_{i-1}} y_i$, où i est le plus petit indice tel que $x_i \neq y_i$.

On suppose que si on a $x \triangleleft y \triangleleft z$, et $x \triangleleft y'$ avec $y' \prec_x y$, alors :

- ▶ soit $\exists y''$ avec $x \triangleleft y'' \triangleleft z$, $y'' \prec_x y$,
- ▶ soit $\exists z'$ avec $x \triangleleft z' \leq y' \vee z$ et $z' \prec_y z$.

Théorème. Sous l'hypothèse précédente, l'ordre lexicographique est épluchant.

Fonctions de parking

Fonctions de parking

Définition. Une *fonction de parking* est un mot $a_1 \dots a_n$ d'entiers ≥ 1 tel que le mot trié $a'_1 \dots a'_n$ satisfait $a'_i \leq i$.

Exemple. 123, 132, 213, 122, 212, 111 sont des fonctions de parking, mais pas 133.

Théorème. Il y a $(n + 1)^{n-1}$ fonctions de parking de longueur n .

Elles sont aussi en bijection avec les arbres de Cayley, les factorisations du cycle $(1, 2, \dots, n + 1)$ en produit de n transpositions.

Fonctions de parking

Le groupe symétrique \mathfrak{S}_n agit sur les fonctions de parking par

$$\sigma \cdot (a_1 \dots a_n) = a_{\sigma^{-1}(1)} \dots a_{\sigma^{-1}(n)}.$$

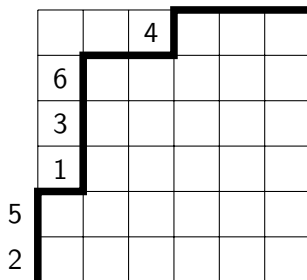
Le caractère de cette action est :

$$\begin{aligned}\chi(\sigma) &= \#\{\text{fonctions de parking de longueur } n \text{ fixées par } \sigma\} \\ &= (n+1)^{z(\sigma)-1}\end{aligned}$$

où $z(\sigma)$ est le nombre de cycles de σ .

Fonctions de parking

Une description alternative : on étiquette les pas montants d'un chemin de Dyck de longueur $2n$ avec les entiers de 1 à n , de façon croissante sur chaque suite de pas consécutifs.



Les étiquettes le long de la i ème ligne verticale sont les indices de i dans la définition précédente, par exemple ci-dessous correspond à 212412.

Parking functions

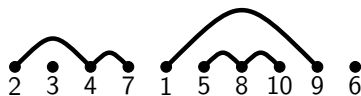
On peut utiliser les partitions non-croisées au lieu de chemins de Dyck.

Proposition. Les fonctions de parking sont en bijection avec les paires (π, σ) où π est une partition non-croisée de $\{1, \dots, n\}$ et $\pi \in \mathfrak{S}_n$ est une permutation, telle que pour chaque bloc $b \in \pi$, $\sigma(i_1) < \sigma(i_2) < \dots$ avec $b = \{i_1 < i_2 < \dots\}$.

Partition non-croisée :



Fonction de parking :



$(\sigma(i_1), \sigma(i_2), \dots)$ sont des *étiquettes* de b).

Parking functions

La bijection envoie (π, σ) sur $a_1 \dots a_n$ telle que : pour chaque bloc $b = \{i_1 < i_2, \dots\}$ de π , on a $i_1 = a_{\sigma(i_1)} = a_{\sigma(i_2)} = \dots$

L'exemple précédent



donne 51216[10]1656.

Parking functions

Remark. L'action du groupe symétrique sur les paires (π, σ) change σ seulement.

Un choix naturel de représentants pour les orbites sont les (π, σ) où σ est la permutation identité.

Les fonction de parking correspondantes sont les $a_1 \dots a_n$ telles que $a_i \leq i$, et lexicographiquement maximales dans leur orbite avec cette condition, par exemple : 121156665[10].

Le nombre d'orbites est le nombre de Catalan C_n . D'autres représentants (apparemment plus naturels) sont les fonctions de parking croissantes.

Le poset des fonctions de parking

Un ordre partiel sur les fonctions de parking est défini par :

$(\pi, \sigma) \leq (\pi', \sigma')$ si

- ▶ π' est un raffinement de π ,
- ▶ si un bloc $b \in \pi$ est l'union de blocs $b'_1, b'_2, \dots \in \pi'$ alors les étiquettes de b sont l'union de celles de b'_1, b'_2, \dots

Le poset des fonctions de parking

Proposition.

- ▶ Il y a un unique élément minimal (la partition à un seul bloc avec son unique étiquetage croissant).
- ▶ Il y a $n!$ éléments maximaux (la partition à n blocs de taille 1 avec $n!$ étiquetages possibles).

Proposition. Pour chaque élément maximal (π, σ) , l'idéal contenant les éléments sous (π, σ) est isomorphe au poset NC_n .

Le poset des fonctions de parking

Ce poset a été introduit par Edelman en 1980 sous une forme un peu différente.

Théorème. [Edelman] Le nombre d'éléments de rang k (avec $0 \leq k \leq n - 1$) dans ce poset est :

$$k! \binom{n}{k} S_2(n, k + 1),$$

où le rang de (π, σ) est le nombre de bloc de π .

C'est aussi le nombre de fonctions de parking de longueur avec k valeurs distinctes.

Théorème [Edelman]. Le nombre de chaînes $x_1 \leq \dots \leq x_m$ dans ce poset est

$$(mn + 1)^{n-1}.$$

Le poset des fonctions de parking

Théorème. Le nombre de chaînes $x_1 \leq \cdots \leq x_k$ dans P avec x_k de rang r est

$$r! \binom{kn}{r} S_2(n, r+1).$$

Ceci généralise l'énumération par rang. On obtient aussi les *nombre de Whitney* (de première espèce) par la spécialisation $k = -1$.

Ce poset apparaît implicitement dans la théorie des *espaces de parking* d'Armstrong, Reiner, Rhoades. En particulier, d'après cette théorie, le caractère de \mathfrak{S}_n agissant sur les chaînes $x_1 \leq \cdots \leq x_m$ est

$$\sigma \mapsto (mn + 1)^{z(\sigma) - 1}.$$

Épluchabilité

Le *code* de $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ est :

$$\gamma(\sigma) = \gamma_n(\sigma) \dots \gamma_1(\sigma)$$

avec

$$\gamma_i(\sigma) = \#\{j > \sigma^{-1}(i) : i > \sigma(j)\}.$$

Par exemple $\gamma(3142) = 1200$.

Théorème. On définit un ordre total \prec_f sur les éléments (π', σ') qui couvrent $f = (\pi, \sigma)$ par comparaison lexicographique de $(\gamma(\sigma'), (\pi')^{-1}\pi)$. Alors les ordres $(\prec_f)_{f \in PF_n}$ satisfont le critère d'épluchabilité.

Homologie des posets

Homologie des posets

L'homologie du poset $PF'_n = PF_n \setminus \{m\}$ est l'homologie simpliciale de son complexe d'ordre.

Explicitement, soit C_i l'espace vectoriel avec pour base les chaînes strictes $x_1 < \dots < x_{i+1}$ dans PF'_n pour $i \geq -1$. (Comme \mathfrak{S}_n agit sur PF'_n en respectant l'ordre, c'est un \mathfrak{S}_n -module.)

Soit $\partial_i : C_i \rightarrow C_{i-1}$ l'application :

$$\partial_i(x_1 < \dots < x_{i+1}) = \sum_{j=1}^i (-1)^j (x_1 < \dots < \check{x}_j \dots < x_i).$$

Alors $\partial_i \circ \partial_{i+1} = 0$. Le i ème groupe d'homologie réduite est :

$$\tilde{H}_i(P) = \ker(\partial_i) / \text{im}(\partial_{i+1}).$$

Homologie des posets

Comme le poset est épluchable, il y a un unique groupe d'homologie non nul, celui de degré maximal : $\tilde{H}_{n-2}(PF_n)$. Sa dimension est le nombre de sphères dans le bouquet, c'est aussi (au signe près) l'invariant de Möbius de $PF_n \cup \{M\}$.

Le groupe symétrique agit aussi sur $\tilde{H}_{n-2}(PF_n)$.

Théorème. Le caractère de \mathfrak{S}_n sur $\tilde{H}_{n-2}(PF_n)$ est

$$\chi(\sigma) = (-1)^{\ell(\sigma)}(n-1)^{z(\sigma)-1}.$$

En particulier, l'invariant de Möbius de $PF_n \cup \{M\}$ est $(-1)^n(n-1)^{n-1}$.

Homologie des posets

Preuve. On utilise d'abord la *formule des traces de Hopf* [Sundaram]. Elle donne :

$$\sum (-1)^i C_i = \sum (-1)^i \tilde{H}_i(PF_n) = (-1)^n \tilde{H}_{n-2}(PF_n).$$

Ensuite, C_i est relié au caractère Z_m de \mathfrak{S}_n agissant sur les chaînes $x_1 \leq \dots \leq x_m$ par

$$Z_m = \sum_{i=0}^m \binom{m}{i} C_i.$$

On prend $m = -1$ et on utilise :

$$\binom{-1}{i} = (-1)^i, \quad Z_m(\sigma) = (mn + 1)^{z(\sigma) - 1}.$$

Homologie des posets

Remarque. Le *caractère signe* ϵ est défini par
 $\sigma \mapsto (-1)^{\ell(\sigma)} = (-1)^{n-z(\sigma)}$.

Une fonction de parking est dite *primitive* si le chemin de dyck associé a un seul retour à 0. Soit $PPF_n \subset PF_n$ le sous-ensemble des fonctions de parking primitives.

Proposition. Le caractère de \mathfrak{S}_n agissant sur PPF_n est
 $\sigma \mapsto (n-1)^{z(\sigma)-1}$. En particulier on a (dans l'anneau des caractères de \mathfrak{S}_n) :

$$\tilde{H}_{n-2}(PF'_n) = \epsilon \otimes PPF_n.$$

Merci pour votre attention