C. R. Acad. Sci. Paris, t. 319, Série I, p. 1331-1335, 1994

Analyse numérique/*Numerical Analysis*

Convergence d'une approximation discontinue des systèmes du premier ordre

Philippe HELLUY et Sandrine DAYMA

Résumé – Dans cette note, on démontre la convergence d'une approximation discontinue des systèmes du premier ordre (applicable, entre autres, au système de Maxwell harmonique). Le cas des coefficients discontinus est traité.

Convergence of a discontinuous approximation of first order systems

Abstract – *In this note, we prove a convergence result for a discontinuous approximation of first order systems (the harmonic Maxwell's equations are of this type). We handle the case of discontinuous coefficients.*

Abridged English Version – In this note, we propose an alternative to the use of conforming finite elements in the numerical analysis of harmonic electromagnetic problems. Our method has the following advantages:

1. mesh refinement and domain decomposition are simplified;
2. different approximation functions may be used with the same variationnal formulation;

The main disadvantage is that more unknowns are often needed.

To be more general, we consider a boundary value problem (1) for a first order dissipative symmetric system (*see* [2]). We impose to the solution Φ_S of (1) to be in the kernel of the negative part of the flux matrix, $f(n) = \sum_{k=1}^{m} A^k n_k$, on the boundary $\partial\Omega$. In the case of the harmonic Maxwell problem, this condition may be interpreted as a radiation condition on $\partial\Omega$ (*cf.* [6]).

We then use a variationnal formulation (2) introduced by Lesaint to discretize the problem (1). The important fact here is that no compatibility condition is imposed between two finite elements. Our approximation ϕ_S of Φ_S is piecewise polynomial and discontinuous (this method is known as the Galerkin discontinuous method).

Therefore, it is necessary to show that we control the discontinuities when the step h of the mesh tends to 0. In [3], Johnson *et al.* proved a convergence result in a special norm (4) which is mesh dependant. The square of the norm (4) is composed of an L^2 part and a supplementary term. In conforming finite elements methods, this term is zero. Here, it is shown to tend to 0 with h.

A straightforward adaptation of [3], [4], permits us to handle the important case of discontinuous Φ_S, if the set $D\Phi_S$ of the discontinuities of Φ_S coincide with edges of elements. This is not restrictive because this set can be known *a priori* from standard regularity theorems (*see* [5]).

Unfortunately in this note, we assumed the parameter $\nu > 0$. And in most applications, $\nu = 0$. We did not succeed in carrying out the proof in this case (this is a classical difficulty in the approximation of the harmonic Maxwell problem. ν is then called the limiting absorption parameter). Therefore we present some concluded numerical result in the case $\nu = 0$.

Note présentée par Philippe G. CIARLET.

0764-4442/94/03191331 $ 2.00

For a more detailed presentation, *see* [6], where a parallel algorithm is described to solve (3). Non reflecting boundary conditions adapted to the flux splitting are also available.

---

1. NOTATIONS. – Dans cette Note, Ω désigne un ouvert borné de $\mathbb{R}^m$ $(m \geqq 1)$ de frontière $\partial\Omega$ régulière.

E^l $(l \geqq 1)$ sera l'ensemble des applications de $\overline{\Omega}$ dans $\mathbb{C}^p$ $(p \geqq 1)$ de régularité H^l par morceaux. Pour $\Phi \in E^l$, on notera $D\Phi$ l'ensemble des points aux voisinages desquels Φ n'est pas H^l. $D\Phi$ est une surface de dimension $m-1$, régulière par morceaux, que l'on suppose orientée par une normale $n = (n_1 \ldots n_m)$ arbitraire. On notera également n la normale sortante à Ω sur $\partial\Omega$. $R\,\Phi$ est l'ensemble $\Omega \backslash D\Phi$. De plus, on peut définir les traces de Φ dans $H^{l-1/2}(D\Phi)$ de part et d'autre de $D\Phi$, par densité, et grâce à l'identité :

$$\forall x \in D\Phi$$
$$\Phi_+(x) = \lim_{\alpha \to 0^+} \Phi(x + \alpha\, n) \qquad \text{et} \qquad \Phi_-(x) = \lim_{\alpha \to 0^-} \Phi(x + \alpha\, n)$$

Φ et Ψ étant deux éléments de E^l, $(\,.\,,\,.\,)$, $[\,.\,,\,.\,]$ et $\{\,.\,,\,.\,\}$ désigneront respectivement les parties réelles des produits scalaires usuels sur $L^2(R\Phi \cap R\Psi)$, $L^2(D\Phi \cup D\Psi)$ et $L^2(\partial\Omega)$.

Pour une matrice A hermitienne, on notera Π_A^+ (respectivement Π_A^-) la projection orthogonale sur l'espace vectoriel engendré par les vecteurs propres de A associés à des valeurs propres > 0 (respectivement < 0). La partie positive (respectivement négative) de A est alors $A^+ = \Pi_A^+ A$ (respectivement $A^- = \Pi_A^- A$). On posera $|A| = A^+ - A^-$.

Soit $S \in L^2(\Omega)$ et Φ_S, l'unique solution faible du problème aux limites suivant (*voir* [2]) :

$$(1) \qquad \begin{cases} \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{m} A^k \frac{\partial}{\partial x_k} + z\,A^0(x) + B(x)\right)\Phi = S \\ \Phi \in \ker f(n)^- \qquad \text{sur} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

où :

1. Les $(A_k)_{k=1\ldots m}$ sont des matrices hermitiennes de dimension $p \times p$, constantes;
2. $f(n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{m} A^k n_k$ est de rang constant sur $\partial\Omega$ $\left[\text{on notera } f(\partial) = \displaystyle\sum_{k=1}^{m} A^k (\partial/\partial x_k)\right]$;
3. z est un complexe de partie réelle ν et de partie imaginaire ω avec $\nu > 0$ et $\omega \neq 0$;
4. $A^0(x)$ est une matrice hermitienne, régulière par morceaux en x. De plus, nous supposerons que A^0 est supérieure à l'identité (au sens où $\forall u \in \mathbb{C}^p$, $\langle A^0 u, u\rangle \geqq \langle u, u\rangle$);
5. $B(x)$ est une matrice positive (pas nécessairement hermitienne).

Si Φ_S est dans E^l (ce type de régularité est étudié dans [5] pour le système de Maxwell harmonique), (1) est équivalent à la formulation variationnelle suivante (*voir* [1]) :

$$(2) \qquad \textit{trouver } \Phi \in E^l \textit{ tel que } \forall \Psi \in E^l \textit{ on ait } \mathcal{B}(\Phi, \Psi) = \mathcal{L}(\Psi)$$

où la forme bilinéaire $\mathcal{B}$ est définie par :

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(\Phi, \Psi) =& ((z\,A^0 + B + f(\partial))\,\Phi, \Psi) + [f(n)^-(\Phi_+ - \Phi_-), \Psi_-] \\ &+ [f(-n)^-(\Phi_- - \Phi_+), \Psi_+] + \{-f(n)^-\Phi, \Psi\} \end{aligned}$$

et la forme linéaire

$$\mathcal{L}(\Psi) = (S, \Psi).$$

Soit une triangulation $(q_i)_{(i=1\dots r)}$ de $\overline{\Omega}$, éventuellement courbe et non conforme, et soit E_h^l, l'espace vectoriel des applications de $\overline{\Omega}$ dans $\mathbb{C}^p$, polynômiales de degré $\leqq l-1$ par élément q_i. $h = \max_i \operatorname{diam}(q_i)$. Nous ferons l'hypothèse, fondamentale dans la suite, que $D\Phi \subset \bigcup_i \partial q_i$. Ce n'est pas une contrainte gênante, dans la mesure où $D\Phi$ peut être connu *a priori*. Une approximation de (1) est alors construite en restreignant la formulation (2) à E_h^l. L'approximation de Φ_S, notée ϕ_S est donc solution de :

$$\text{(3)} \qquad \textit{trouver } \phi \in E_h^l \textit{ tel que } \forall \psi \in E_h^l \textit{ on ait } \mathcal{B}(\phi, \psi) = \mathcal{L}(\psi).$$

2. ESTIMATION D'ERREUR. – En adaptant les résultats de [3] et [4], nous allons montrer :

THÉORÈME 1. – *Il existe une constante $C(\nu)$ indépendante de h telle que :*

$$\|\Phi_S - \phi_S\| \leqq C(\nu)\, h^{l-1/2}\, |\Phi_S|_l$$

où la norme $\|\,.\,\|$ est définie par :

$$\text{(4)} \quad \|\Phi\|^2 = (\nu A^0 \Phi, \Phi) + \left[\frac{|f(n)|}{2}(\Phi_+ - \Phi_-), \Phi_+ - \Phi_-\right] + \left\{\frac{|f(n)|}{2}\Phi, \Phi\right\}$$

et la norme $|\Phi|_l$ par $|\Phi|_l = |\Phi|_{H^l(R\Phi)}$.

Démonstration. – En appliquant la formule de Green à chaque élément du maillage, on voit que, pour tout Φ, Ψ dans E^l, on a :

$$\text{(5)} \quad (f(\partial)\Phi, \Psi) = (\Phi, -f(\partial)\Psi) + [f(n)\Phi_-, \Psi_-] - [f(n)\Phi_+, \Psi_+] + \{f(n)\Phi, \Psi\}$$

et la formule de Stokes donne :

$$\text{(6)} \quad (f(\partial)\Phi, \Phi) = \frac{1}{2}[f(n)\Phi_-, \Phi_-] + \frac{1}{2}[-f(n)\Phi_+, \Psi_+] + \frac{1}{2}\{f(n)\Phi, \Psi\}$$

ainsi, la partie symétrique de $\mathcal{B}$ s'écrit :

$$\text{(7)} \quad \frac{\mathcal{B}(\Phi, \Psi) + \mathcal{B}(\Psi, \Phi)}{2} = ((\nu A^0 + B)\Phi, \Psi) + \frac{1}{2}[|f(n)|(\Phi_+ - \Phi_-), \Psi_+ - \Psi_-] + \left\{\frac{1}{2}|f(n)|\Phi, \Psi\right\}$$

et la partie antisymétrique :

$$\text{(8)} \quad \frac{\mathcal{B}(\Phi, \Psi) - \mathcal{B}(\Psi, \Phi)}{2} = -(\Phi, f(\partial)\Psi) - (i\omega A^0 \Psi, \Phi) + \frac{1}{2}[f(n)(\Psi_- - \Psi_+), \Phi_+ + \Phi_-] + \left\{\frac{1}{2}f(n)\Phi, \Psi\right\}$$

Notons alors $\tilde{\Phi}_S$ le projeté au sens L^2 de Φ_S sur E_h^l et $\Delta_h = \tilde{\Phi}_S - \phi_S$, $\Delta = \tilde{\Phi}_S - \Phi_S$. Pour tout élément q, on dispose des estimations classiques :

$$\text{(9)} \quad |\Delta|_{L^2(q)} \leqq C\, h^l\, |\Phi_S|_{H^l(q)} \quad \text{et} \quad |\Delta|_{L^2(\partial q)} \leqq C\, h^{l-1/2}\, |\Phi_S|_{H^l(q)}.$$

C'est à ce stade qu'intervient l'hypothèse $D\Phi \subset \bigcup_i \partial q_i$. En effet, si une discontinuité de Φ_S traverse q, les estimations (9) ne sont plus valables.

Puisque ϕ_S est solution du problème discret, on a :

$$\mathcal{B}(\Delta, \Delta_h) = \mathcal{B}(\Delta_h, \Delta_h) = \|\Delta_h\|^2. \tag{10}$$

En appliquant l'inégalité de Schwartz à la partie symétrique de $\mathcal{B}$, on voit que :

$$\begin{aligned} |\mathcal{B}(\Delta, \Delta_h)| \leqq \|\Delta\| \, \|\Delta_h\| \\ + \Big| -(i\,\omega\, A^0\, \Delta_h\,,\, \Delta) + \frac{1}{2}[f(n)(\Delta_{h-} - \Delta_{h+}),\, \Delta_+ + \Delta_-] \\ + \frac{1}{2}\{f(n)\,\Delta,\, \Delta_h\} \Big|. \end{aligned} \tag{11}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} &|[f(n)(\Delta_{h-} - \Delta_{h+}),\, \Delta_+ + \Delta_-]|^2 \\ &\leqq [|f(n)|(\Delta_{h-} - \Delta_{h+}),\, \Delta_{h-} - \Delta_{h+}]\,[|f(n)|(\Delta_+ + \Delta_-),\, \Delta_+ + \Delta_-] \end{aligned} \tag{12}$$

et d'après (9),

$$|[f(n)(\Delta_{h-} - \Delta_{h+}),\, \Delta_+ + \Delta_-]| \leqq C\, \|\Delta_h\|\, h^{l-1/2}\, |\Phi_S|_l. \tag{13}$$

De même, d'après (9)

$$|-(i\,\omega\, A^0\, \Delta_h\,,\, \Delta)| \leqq \frac{C}{\sqrt{\nu}}\, h^l\, \|\Delta_h\|\, |\Phi_S|_l \tag{14}$$

et

$$|\{f(n)\,\Delta,\, \Delta_h\}| \leqq C\, \|\Delta_h\|\, h^{l-1/2}\, |\Phi_S|_l \tag{15}$$

soit en regroupant les inégalités précédentes,

$$\|\Delta_h\| \leqq C(\nu)\, h^{l-1/2}\, |\Phi_S|_l \tag{16}$$

et d'après (9),

$$\|\Delta\| \leqq C(\nu)\, h^{l-1/2}\, |\Phi_S|_l \quad \Box \tag{17}$$

3. Résultats numériques. – Considérons dans $\mathbb{R}^2$ le système du premier ordre

$$\begin{pmatrix} 2\,i\,\pi\varepsilon & 0 & -\dfrac{\partial}{\partial y} \\ 0 & 2\,i\,\pi\varepsilon & \dfrac{\partial}{\partial x} \\ -\dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial x} & 2\,i\,\pi\mu \end{pmatrix} \Phi = 0 \tag{18}$$

avec

$$\begin{cases} \varepsilon(x, y) = \varepsilon_1 = 1, \quad \mu(x, y) = \mu_1 = 1 & \text{si} \quad x > 0 \\ \varepsilon(x, y) = \varepsilon_2 = \sqrt{3}, \quad \mu(x, y) = \mu_2 = 2/\sqrt{3} & \text{si} \quad x < 0 \end{cases} \tag{19}$$

Une solution de (18) est donnée par :

(20)
$$\Phi_{\text{inc}}(x, y) = \begin{pmatrix} -v\sqrt{\dfrac{\mu}{\varepsilon}} \\ u\sqrt{\dfrac{\mu}{\varepsilon}} \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2i\pi\sqrt{\varepsilon\mu}\,(ux+vy)}$$

avec

(21)
$$\begin{cases} u(x, y) = u_1 = \cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right), \quad v(x, y) = v_1 = \cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right) & \text{si} \quad x > 0 \\ u(x, y) = u_2 = u_1\sqrt{\dfrac{\varepsilon_2\,\mu_1}{\varepsilon_1\,\mu_2}}, \quad v(x, y) = v_2 = v_1\sqrt{\dfrac{\varepsilon_1\,\mu_1}{\varepsilon_2\,\mu_2}} & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

Cette solution est discontinue sur la droite d'équation $x = 0$.

Soit $\partial\Omega$ le carré d'équation $\max(|x|, |y|) = 1/2$, et soit Φ l'unique solution de (18) vérifiant la condition aux limites inhomogènes $f(n)^-\Phi = g = f(n)^-\Phi_{\text{inc}}$. La résolution numérique de (3), avec $l = 2$ (éléments finis de type $P1$ discontinus), conduit alors aux résultats suivants :

(22)

h	$(\Phi_{\text{inc}} - \phi, \Phi_{\text{inc}} - \phi)$	$\frac{1}{2}[\,|f(n)|\,\phi, \phi]$	$|\Phi_{\text{inc}} - \phi|_\infty$
$\sim \frac{1}{4}$	$1,16479.10^{-1}$	$2,07401.10^{-1}$	$9,46343.10^{-1}$
$\sim \frac{1}{8}$	$6,68078.10^{-3}$	$5,70103.10^{-2}$	$3,24776.10^{-1}$
$\sim \frac{1}{16}$	$3,29146.10^{-4}$	$8,67204.10^{-3}$	$8,66241.10^{-2}$
$\sim \frac{1}{32}$	$1,94792.10^{-5}$	$1,14688.10^{-3}$	$2,19455.10^{-2}$

Note remise le 11 octobre 1994, acceptée le 17 octobre 1994.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] P. LESAINT, Sur la résolution des systèmes hyperboliques du premier ordre par des méthodes d'éléments finis, *Thèse*, rapport CEA-R-4731, 1976.

[2] J. RAUCH, Symmetric positive systems with boundary characteristic of constant multiplicity, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 291:1, 1985, p. 167-187.

[3] C. JOHNSON, U. NÄVERT et J. PITKÄRANTA, Finite element methods for linear hyperbolic problems, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 45, 1984, p. 285-312.

[4] J. P. CROISILLE, Contribution à l'étude théorique et à l'approximation par éléments finis du système hyperbolique de la dynamique des gaz multidimensionnelle et multi-espèces, *Thèse de doctorat*, Université Paris-VI, 1990.

[5] T. ABBOUD et J. C. NÉDÉLEC, Electromagnetic waves in an inhomogeneous medium, Rapport du Centre de Math. Appl. Polytechnique, n° 203, 1989.

[6] P. HELLUY, Résolution numérique des équations de Maxwell harmoniques par une méthode d'éléments finis discontinus, *Thèse de doctorat*, ENSAE, Toulouse, janvier 1994.

ISITV, Université de Toulon, BP n° 932, 83957 La Garde Cedex, France.