M1 CSSI Calcul scientifique TP1

October 20, 2009

Factorisation d'une matrice tridiagonale

1. On considère une matrice tridiagonale de la forme

$$\begin{aligned} A_{i,i} &= diag(i), \quad i = 1 \cdots n, \\ Ai, i-1 &= low(i), \quad i = 2 \cdots n, \\ A_{i,i+1} &= sup(i), \quad i = 1 \cdots n-1, \\ A_{i,j} &= 0 \text{ sinon.} \end{aligned}$$

   écrire un sous-programme fortran nommé `factolu(n,low,diag,sup,x,b,ityp)`. Si l'entier `ityp` vaut 1 alors ce sous-programme calcule la factorisation LU de A et la stocke dans les mêmes tableaux `low`, `diag` et `sup`. Si l'entier `ityp` vaut 2, le sous-programme effectue un algorithme de descente-remontée pour résoudre le système $Ax = b$ et stocke le résultat dans x (on suppose donc qu'un appel précédent avec `iytp`=1 a permis de factoriser A). Si l'entier `ityp`=3 alors le sous-programme effectue le produit Ax et stocke le résultat dans b. Décrire votre programmation et commenter le code FORTRAN90 proprement.

2. Décrire les tests qui vous ont permis de vérifier que votre programme est juste (pour toutes les valeurs de `ityp`). Vous pouvez par exemple comparer vos résultats avec ceux d'un autre logiciel comme MAPLE.

Application: problème de Laplace en dimension 1

1. Une fonction f continue étant donnée, proposer une discrétisation par différences finies $u_i \simeq u(iL/(n+1))$, $i = 1 \cdots n$ du problème de Dirichlet

$$\begin{aligned} -u''(x) &= f(x), \quad x \in]0, L[, \\ u(0) = u(L) &= 0. \end{aligned}$$

2. Résoudre ce problème discret à l'aide du sous-programme écrit précédement. Décrire la programmation, commenter soigneusement les sources FORTRAN.

3. Vérifier numériquement que votre méthode est convergente lorsque $\Delta x = L/(n+1) \to 0$. On pourra par exemple choisir $u(x) = \sin(\pi p x)\exp(-\lambda x)$ (ou tout autre fonction vérifiant les conditions aux limites), en déduire f, définir l'erreur $e(\Delta x)$ par

$$e(\Delta x) = \sup_{i=1\cdots n} \left| u_i - u(\frac{iL}{n+1}) \right|$$

   et tracer $\ln(e(\Delta x))$ en fonction de $\ln(\Delta x)$ pour diverses valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{N}$.

4. Même étude pour le problème mixte de Dirichlet-Neumann

$$-u''(x) = f(x), \quad x \in]0, L[, \quad u'(0) = u(L) = 0.$$