M1 Maths Calcul scientifique TP4

S1

Résolution de l'équation de Burgers

1. Calculer la solution (éventuellement discontinue mais admissible au sens de Lax) du problème d'évolution

$$\begin{aligned} \partial_t u + \partial_x (u^2/2) &= 0, \quad x \in [-1,2], \quad t \in [0,T], \\ u(-1,t) &= 1, \quad t \in [0,T], \\ u(x,0) &= u_0(x) \quad x \in [-1,2], \end{aligned}$$

   où la condition initiale est de la forme

$$u_0(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x < 0, \\ 1 - x \text{ si } 0 \le x \le 1, \\ 0 \text{ si } 1 < x. \end{cases}$$

2. Programmer le schéma de Rusanov pour résoudre ce problème. Comparer la solution numérique et la solution approchée aux instants $t = 1/2$, $t = 1$ et $t = 2$ avec des grilles à $N = 50$, $N = 100$, $N = 1000$, $N = 10000$ points. Conclusion ?
3. Même question avec le schéma aux différences finies

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + u_{i-1}^n \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} = 0.$$

4. On considère maintenant l'équation du trafic automobile

$$\partial_t \rho + \partial_x f(\rho) = 0,$$

   avec (unité de distance en kilomètre, unité de temps en heure)

$$f(\rho) = \rho v_0 (1 - \rho/\rho_0), \quad v_0 = 130, \quad \rho_0 = 200.$$

   On considère un bouchon ($\rho = \rho_0$) sur un tronçon d'autoroute de longueur $L = 1$ km. À $t = 0$ l'obstacle sur l'autoroute est enlevé. Programmer le schéma de Rusanov pour résoudre ce problème. Au bout de combien de temps le trafic devient-il complètement fluide ($\rho = 0$ sur le tronçon) ? Tracer la densité de véhicules $\rho(\cdot, t)$ pour diverses valeurs de t.