

M1 Mathématiques, Calcul scientifique

Consignes :

- Documents interdits, sauf une feuille manuscrite de votre main (pas de photocopie).
- Communications, téléphones, IA, regards en biais, etc. sont interdits.
- Les copies seront corrigées par un humain et éventuellement vérifiées par une IA. Il est donc recommandé d'écrire **très** lisiblement. Masquer complètement le texte barré.

Sujet :

Le but de ce sujet est d'analyser un schéma de différences finies pour résoudre l'EDP

$$\partial_t u - \mu \partial_{xx} u + \varepsilon \partial_x (u^2/2) = 0, \quad (1)$$

où $u(x, t)$ est la fonction inconnue, $(x, t) \in]0, L[\times]0, T[$, avec la condition initiale

$$u(x, 0) = u_0(x)$$

et les conditions aux limites

$$u(0, t) = u(L, t) = 0.$$

Ce schéma est le suivant. N est un entier > 0 . Le pas d'espace est $h = 1/(N+1)$. Le pas de temps est noté $\tau > 0$. L'approximation est notée

$$u_i^n \simeq u(x_i, t_n), \quad x_i = (i+1)h, \quad 0 \leq i < N, \quad t_n = n\tau.$$

On convient que $u_{-1}^n = u_N^n = 0$. Le schéma s'écrit alors

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} - \mu \frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{h^2} + \varepsilon \frac{(u_i^n)^2 - (u_{i-1}^n)^2}{2h} = 0. \quad (2)$$

La question 0 est une question d'échauffement. Recopier **intégralement et exactement** cette question ainsi que la réponse fournie. Pour les questions suivantes ne donner que la réponse. Penser à numéroté les questions sur votre copie.

0. De quel ordre est l'EDP (1) ?

Réponse : l'EDP est du second ordre à cause du terme $-\mu \partial_{xx} u$ qui fait intervenir une dérivée seconde en x .

Questions à répondre sur feuille

1. À propos de l'EDP (1) :

- Pourquoi faut-il que $\mu \geq 0$?
- Que devient l'EDP lorsque $\mu > 0$ et $\varepsilon = 0$?
- Que devient l'EDP lorsque $\mu = 0$ et $\varepsilon = 1$?
- Peut-on prendre $\varepsilon = -1$?

2. Le schéma (2) est-il implicite ? Explicite ? Justifier ce choix.
3. Montrer avec des développements de Taylor que le schéma (2) est consistant avec l'EDP (1).
4. Dans les questions ci-dessous, on considère tout d'abord le cas $\varepsilon = 0$.
 - (a) On définit le vecteur U^n par

$$U^n = \begin{pmatrix} u_0^n \\ \vdots \\ u_{N-1}^n \end{pmatrix}.$$

Montrer que le schéma (2) peut s'écrire sous la forme

$$\left(I + \frac{\mu\tau}{h^2}A\right)U^{n+1} = U^n, \quad (3)$$

où A est une matrice que l'on déterminera et I est la matrice identité de taille N . Attention à bien traiter les valeurs de u_0^{n+1} et u_{N-1}^{n+1} qui doivent rester inchangées.

- (b) Montrer que le système linéaire (3) admet une unique solution.
- (c) On dit qu'une matrice $M = (m_{i,j})_{i,j} \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ est une M-matrice si tous ses termes extra-diagonaux sont négatifs ou nuls, et si

$$\forall i \in \{0, \dots, N-1\}, \quad m_{i,i} > -\sum_{j \neq i} m_{i,j}.$$

Montrer alors que M est inversible et que tous les éléments de M^{-1} sont positifs ou nuls.

Indication : considérer une décomposition de M sous la forme

$$M = D - N,$$

où D est la diagonale de M , puis utiliser un développement en série de l'inverse de M .

- (d) En déduire que si U^n est un vecteur dont toutes les composantes sont positives ou nulles alors c'est encore le cas de U^{n+1} .
 - (e) En déduire le principe du maximum pour le schéma : si les composantes de la condition initiale U^0 sont dans l'intervalle $[0, m]$, alors c'est encore vrai pour les composantes de la solution approchée U^n à tous les pas de temps $n > 0$.
5. On suppose maintenant que $\varepsilon \geq 0$, que les composantes de U^0 sont positives ou nulles, et que le pas de temps satisfait, pour tout n , la condition de CFL

$$\tau \leq \frac{h}{\varepsilon \max_i |u_i^n|}.$$

Montrer que le schéma (2) satisfait le principe du maximum.

Indication : introduire la solution intermédiaire

$$\frac{u_i^{n+1/2} - u_i^n}{\tau} + \varepsilon \frac{(u_i^n)^2 - (u_{i-1}^n)^2}{2h} = 0,$$

et utiliser les résultats précédents.

6. Comment modifier le schéma si $\varepsilon \leq 0$? Pourquoi ?
7. Question facultative : calculer la limite quand t tend vers l'infini de $u(x, t)$.

Questions de travaux pratiques

8. Programmer le schéma dans le langage de votre choix. Expliquer la programmation. Comment exploiter la structure creuse de A en pratique ?
9. Comment vérifier la validité des résultats numériques ? Peut-on tracer des courbes de convergence ?
10. On suppose que u_0 est la fonction constante égale à 1 sur $]0, 1[$, nulle en $x = 1$, et égale à 1 en $x = 0$. On prend $\mu = 1/10$ et $\varepsilon = 1$. Calculer numériquement la limite quand t tend vers l'infini de $u(x, t)$ avec un maillage de taille $N = 100, 1000$ puis 10000. Qu'en déduire sur l'EDP (1) ?
11. Programmer d'autres schémas pour la même EDP (1) en modifiant le traitement (implicite ou explicite) des différents termes. Comparer les résultats obtenus avec ceux du schéma précédent.