Préparation à l'examen de calcul scientfique

Dans la suite E désigne l'ensemble des fonctions $u(x,t)$ sur $\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_t$ qui vérifient :

1. $\forall t$, $x \mapsto u(x,t)$ est dans $L^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$.
2. $\forall t$, $x \mapsto u(x,t)$ est de classe C^2 ;
3. $\forall t$, $u(x,t) \to 0$ quand $x \to \pm\infty$;
4. il existe un réel T tel que

$$\forall t \leq T, \quad u(x,t) = 0.$$

Dans la suite, une fonction u dans E sera dite **causale**.

1) Montrer qu'une fonction causale qui vérifie l'équation de la chaleur ou l'équation de transport est forcément nulle.

2) Pour une condition initiale $u_0(x)$ de classe C^2 à support compact, on considère la fonction u définie par

$$\partial_t u - \partial_{xx} u = 0, \quad t \geq 0,$$

$$u(x, t=0) = u_0(x),$$

$$u(x,t) = 0, \quad t < 0.$$

Montrer que u est bien définie et que c'est une fonction causale.

3) Montrer que, au sens des distributions, u satisfait pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}^2$

$$\partial_t u - \partial_{xx} u = \delta u_0,$$

où δ est la distribution de Dirac en temps, définie formellement par

$$\int_t \delta(t)\varphi(t)dt := \varphi(0).$$

4) On peut donc remplacer le problème de la question 2), qui contient une condition initiale en temps, par un problème posé pour tous les temps avec un second membre distributionnel : trouver une fonction causale telle que

$$\partial_t u - \partial_{xx} u = \delta u_0.$$

Montrer que la solution de ce problème est bien unique dans l'ensemble des fonctions causales.

5) Pour passer au numérique, il faut savoir approcher la distribution de Dirac. On considère d'abord une fonction $\rho : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ à support dans l'intervalle $[-1,1]$ telle que $\int \rho = 1$. Soit $\tau > 0$ et soit δ_τ la fonction (appelée **unité approchée**) définie par

$$\delta_\tau(t) = \frac{1}{\tau}\rho(\frac{t}{\tau}).$$

Montrer que δ_τ tend vers δ au sens des distributions quand τ tend vers 0 (c'est à dire que $\lim_{\tau\to 0} < \delta_\tau, \varphi >=< \delta, \varphi >$ pour toute fonction test φ). Sauf indication contraire, dans la suite on prendra

$$\rho(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0,1], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

6) Pour $\tau > 0$ et $h > 0$, on introduit les opérateurs de décalage en temps et en espace sur E par

$$(T_\tau u)(x,t) = u(x, t-\tau), \quad (S_h u)(x,t) = u(x-h, t).$$

Montrer que ces opérateurs sont bien de E dans E.

7) On rappelle la définition de la transformée de Fourier [1] sur $\mathbb{R}$, par rapport à la variable x

$$\hat{u}(\xi, t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t) \exp(-i\xi x) dx.$$

Calculer la transformée de Fourier de $S_h u$. Montrer que si u est causale alors $(\xi, t) \mapsto \hat{u}(\xi, t)$ est causale.

8) Pour approcher les solutions de l'équation de la chaleur, on considère le schéma **fonctionnel** aux différences :

$$\frac{v - T_\tau v}{\tau} + \frac{-S_h v + 2v - S_{-h} v}{h^2} = \delta_\tau v_0. \tag{1}$$

Montrer que ce schéma est équivalent au schéma explicite usuel si l'on pose $v_i^n = v(ih, n\tau)$. Montrer que la solution fonctionnelle est bien causale. Est-il intéressant de changer la fonction ρ ?

9) Comment traduire au niveau du schéma fonctionnel les stabilités ℓ^1 et ℓ^2, vues en cours sur le schéma discret ?

10) Généraliser la notion de coefficient d'amplification de von Neumann au cas du schéma fonctionnel aux différences.

11) Calculer les conditions de stabilité L^2 et L^∞ du schéma (1).

12) Mêmes questions avec l'équation de transport et le schéma décentré d'ordre 1.

13) Comment vérifier la consistance du schéma (1) ? comment cette propriété de consistance se traduit-elle dans l'espace de Fourier.

14) Pour résoudre l'équation de transport

$$\partial_t u + c \partial_x u = 0, \quad c > 0,$$

1. `https://fr.wikipedia.org/wiki/Transformation_de_Fourier`

on considère le schéma suivant

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} + c\frac{3u_i^n - 4u_{i-1}^n + u_{i-2}^n}{h} = d_n u_0(ih),$$

avec

$$d_n = \begin{cases} 1/\tau & \text{si } n = 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Calculer, par la méthode fonctionnelle, la stabilité de ce schéma.