CSMI rattrapage 2019

30 août 2019

1. On considère l'équation de Burgers
$$\partial_t u + \partial_x(u^2/2) \quad = \quad 0, \quad x \in [-1,1], \quad t \in [0,T].$$
Montrez que la fonction
$$u_0(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x < t/2, \\ 0 \text{ si } x \geq t/2, \end{cases}$$
est une solution faible. Cette solution vérifie-t-elle la condition caractéristique de Lax ?
2. Rappeler la définition du schéma de Rusanov. Comment choisit-on la viscosité numérique dans ce schéma ?
3. Écrire un programme en C qui approche la solution ci-dessus au moyen du schéma de Rusanov pour résoudre ce problème. Pour cela, s'inspirer du code C fourni. Comparer la solution numérique et la solution approchée aux instants $t = 1/4$, $t = 1/2$ et $t = 1$ avec des grilles à $N = 50$, $N = 100$, $N = 1000$, $N = 10000$ points. On comparera les solutions exactes et approchées au moyen de Gnuplot en reproduisant l'allure des courbes sur la copie. Conclusion ?
4. Même question avec le schéma aux différences finies
$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + u_{i-1}^n \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} = 0.$$
Conclusion ?
5. On considère maintenant l'équation du trafic automobile
$$\partial_t \rho + \partial_x f(\rho) = 0,$$
avec (unité de distance en kilomètre, unité de temps en heure)
$$f(\rho) = \rho v_0 (1 - \rho/\rho_0), \quad v_0 = 130, \quad \rho_0 = 200.$$
On considère un bouchon ($\rho = \rho_0$) sur un tronçon d'autoroute de longueur $L = 1$ km. À $t = 0$ l'obstacle sur l'autoroute est enlevé. Programmer le schéma de Rusanov pour résoudre ce problème. Au bout de combien de temps le trafic devient-il complètement fluide ($\rho = 0$ sur le tronçon) ? Tracer la densité de véhicules $\rho(\cdot, t)$ pour diverses valeurs de t.