1. Montrer que $t \to |t|$ est dans $H^1(]-1,1[)$ mais pas

$$t \to \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ si } x < 0, \\ -1 \text{ si } x > 0. \end{array} \right.$$

2. Soit le problème aux limites

$$\begin{aligned} -(a(x)u'(x))' &= f(x), \\ u(0) &= u(1) = 0, \end{aligned}$$

où $a(x) = \alpha_1 > 0$ si $x < 1/2$ et $\alpha_2 > 0$ sinon. Ecrire une formulation variationnelle de ce problème. Montrer existence et unicité de la solution dans $H_0^1(]0,1[)$. Quelle est la relation satisfaite par $u'(1/2^-)$ et $u'(1/2^+)$?

3. Soit $h > 0$ et $f \in L^2(]0,1[)$. On considère le problème de minimisation

$$J(u) = \inf_{u \in H_0^1(]0,1[), u \leq h} \int_0^1 \frac{u'^2}{2} - fu.$$

Montrer que $\exists \lambda \in L^2(]0,1[)$, $\lambda \leq 0$ p.p., telle que u est solution de

$$\begin{aligned} -u'' &= f + \lambda, \\ (u-h)\lambda &= 0, \\ u &\leq h. \end{aligned}$$

4. Soit Πu l'interpolé de u par des éléments finis P_2 sur un maillage de pas h. Montrer que si $u \in H^3(]0,1[)$, alors

$$|u - \Pi u| \leq Ch^2 \, |u|_{H^3}.$$

En déduite l'estimation d'erreur de la méthode des éléments finis dans ce cas.

5. Montrer qu'il existe $C > 0$ telle que les fonctions de $H^1(I)$ vérifient

$$|u(x) - u(y)| \leq C(I) \, |x-y|^{1/2}.$$

On rappelle le théorème d'Ascoli: soit I intervalle borné et H un ensemble de fonctions de $C(\overline{I})$. On suppose que H est *équicontinu*, c'est à dire que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, y \in I, \forall f \in H, |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Alors H est relativement compact dans $C(\overline{I})$.Traduire ce théorème. Le comprendre avec des exemples. Puis, déduire du théorème d'Ascoli que si I est borné alors les bornés de H^1 sont relativement compacts dans $C(\overline{I})$. Montrer que ça ne marche plus si I n'est pas borné.

6. Soit I un intervalle borné. Exprimer la norme de u dans $H^1(I)$ et de u' dans $L^2(I)$ à partir des coefficients de Fourier de u. Retrouver ainsi l'inégalité de Poincaré sur une période de u dans le cas où u est périodique.

7. Etudier le problème ($\exists \alpha > 0, \forall x, \beta(x) \geq \alpha$)

$$\begin{aligned} -u''(x) + \beta(x)u(x) &= f(x) \\ u(0) &= u(1) \end{aligned}$$