

CS L2 Calcul scientifique CC1 2015. Documents et calculatrices interdits.

Schéma de Crank-Nicholson

1. Pour résoudre l'équation différentielle

$$x'(t) = f(x(t)),$$

on considère des schémas de la forme

$$x_{n+1} = x_n + \Delta t \Phi(x_n, x_{n+1}, \Delta t). \quad (1)$$

On dit qu'un tel schéma est implicite. Pourquoi? Mettre la méthode d'Euler implicite sous cette forme.

2. Le schéma de Crank-Nicholson s'écrit

$$x_{n+1} = x_n + \frac{\Delta t}{2} (f(x_n) + f(x_{n+1})).$$

Mettre ce schéma sous la forme (1).

3. Rappeler la condition pour qu'un schéma de la forme (1) soit d'ordre 2.
4. Montrer que le schéma de Crank-Nicholson est au moins d'ordre 2.
5. Montrer que ce schéma est inconditionnellement asymptotiquement stable. Est-il positivement stable?
6. Soit M un réel > 0 . On considère la propriété

$$P(x) \Leftrightarrow x \in [-M, M].$$

Montrer que le schéma de Crank-Nicholson est inconditionnellement P -stable dans le cas $f(x) = -\lambda x$, λ étant une constante > 0 .

Newton

Écrire un programme Scilab qui calcule la solution de

$$x^3 - 2 = 0$$

par la méthode de Newton avec une précision $\varepsilon = 10^{-10}$ en partant de $x_0 = 1$. Combien d'itérations n sont-elles nécessaires?

Résolution des systèmes linéaires

Soit le système linéaire $Ax = b$, avec

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

1. Calculer la décomposition LU de A .
2. Résoudre le système linéaire.
3. Soit C une matrice de la forme

$$C = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ l_1 & d_2 & 0 \\ 0 & l_2 & d_3 \end{bmatrix}.$$

Calculer le produit

$$CC^T.$$

4. Trouver une matrice C telle que $CC^T = A$.
5. En utilisant la décomposition de la question 4, résoudre le système linéaire d'une autre façon.