

# CS L2 Calcul scientifique CC1 2015. Documents et calculatrices interdits.

## Schéma de Crank-Nicholson

1. Pour résoudre l'équation différentielle

$$x'(t) = f(x(t)),$$

on considère des schémas de la forme

$$x_{n+1} = x_n + \Delta t \Phi(x_n, x_{n+1}, \Delta t). \quad (1)$$

On dit qu'un tel schéma est implicite. Pourquoi? Mettre la méthode d'Euler implicite sous cette forme.

2. Le schéma de Crank-Nicholson s'écrit

$$x_{n+1} = x_n + \frac{\Delta t}{2} (f(x_n) + f(x_{n+1})).$$

Mettre ce schéma sous la forme (1).

3. Rappeler la condition pour qu'un schéma de la forme (1) soit d'ordre 2.
4. Montrer que le schéma de Crank-Nicholson est au moins d'ordre 2.
5. Montrer que ce schéma est inconditionnellement asymptotiquement stable. Est-il positivement stable?
6. Soit  $M$  un réel  $> 0$ . On considère la propriété

$$P(x) \Leftrightarrow x \in [-M, M].$$

Montrer que le schéma de Crank-Nicholson est inconditionnellement  $P$ -stable dans le cas  $f(x) = -\lambda x$ ,  $\lambda$  étant une constante  $> 0$ .

## Newton

Écrire un programme Scilab qui calcule la solution de

$$x^3 - 2 = 0$$

par la méthode de Newton avec une précision  $\varepsilon = 10^{-10}$  en partant de  $x_0 = 1$ . Combien d'itérations  $n$  sont-elles nécessaires?

## Résolution des systèmes linéaires

Soit le système linéaire  $Ax = b$ , avec

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

1. Calculer la décomposition  $LU$  de  $A$ .
2. Résoudre le système linéaire.
3. Soit  $C$  une matrice de la forme

$$C = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ l_1 & d_2 & 0 \\ 0 & l_2 & d_3 \end{bmatrix}.$$

Calculer le produit

$$CC^T.$$

4. Trouver une matrice  $C$  telle que  $CC^T = A$ .
5. En utilisant la décomposition de la question 4, résoudre le système linéaire d'une autre façon.