CS L2 Calcul scientifique. TP “systèmes linéaires”.

Résolution des systèmes linéaires

On considère une matrice tridiagonale de la forme

$$A = \begin{bmatrix} \delta_1 & u_1 & & 0 \\ \lambda_1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & u_{n-1} \\ 0 & & \lambda_{n-1} & \delta_n \end{bmatrix}$$

et sa décomposition LU avec

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ l_1 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & l_{n-1} & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} d_1 & u_1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & u_{n-1} \\ 0 & & & d_n \end{bmatrix}.$$

1. Rappeler l'algorithme de Crout qui permet de calculer les l_i, $1 \leq i \leq n-1$ et d_j, $1 \leq j \leq n$ ainsi que de résoudre un système linéaire de la forme $Ax = b$.
2. Le programmer dans Scilab. Décrire rapidement votre programme.
3. On considère
$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$
Calculer (à la main) la décomposition LU de A.
4. Vérifier que votre programme Scilab donne le même résultat.
5. Résoudre, avec votre programme, le système linéaire
$$Ax = b, \quad b = (1, \ldots, 1)^T.$$
Comparer le temps de calcul pour des matrices assez grandes avec le solveur LU plein et avec les solveurs de Scilab. Conclusions ?

Déformation d'une membrane

La déformation $y(x)$ d'une membrane de longueur L sous l'effet d'une pression $p > 0$ est solution de l'équation différentielle

$$-(e(x)y'(x))' = p/\mu, \quad y(0) = y(L) = 0. \tag{1}$$

La quantité $e(x) > 0$ est l'épaisseur de la membrane au point x. La constante $\mu > 0$ dépend du matériau dont est fait la membrane. On pourra prendre $p = 1$ et $\mu = 1$.

1. Calculer la solution exacte de cette équation lorsque e est une fonction constante égale à 1.
2. Proposer une discrétisation par différence finies de (1). On choisira un pas d'espace $\Delta x = L/(N+1)$ et une approximation y_i de la déformation $y(x_i)$ aux points $x_i = i\Delta x$, $i = 1 \cdots N$.
3. Réaliser un programme qui calcule le vecteur $Y = (y_1 \cdots y_N)^T$.
4. Vérifier la validité du programme grâce à la solution exacte calculée en 1. Montrer que dans ce cas, la méthode des différences finies est exacte.
5. Vérifier aussi que le programme donne le bon résultat lorsque l'épaisseur $e(x)$ est variable.
6. On fixe $\int_0^L e(x)dx = Le_0$. Comment faut-il répartir la matière pour que la déformation centrale soit minimale ?
7. Modifier le programme pour résoudre l'équation différentielle
$$-(ey')' + y' = 1, \quad y(0) = y(L) = 0.$$
Prendre $e = \text{Cste} = \varepsilon > 0$. Que constatez-vous lorsque $\varepsilon \to 0$?