CS L2 Calcul scientifique CC2 2015. Notes personnelles autorisées, durée 1h.

I) Schéma d'Euler explicite

Soit l'équation différentielle

$$x'(t) = f(x(t)) = 40x(t) - 10x(t)^3, \quad t \in [0,1], \quad x(0) = x_0. \tag{1}$$

Le but de ce TP est d'étudier plusieurs méthode pour calculer une approximation de la solution $x_i \simeq x(i\Delta t)$ avec $\Delta t = 1/N$ où N est un entier ≥ 1 donné. Avec ce choix, on a donc $i \in \{0, 1, 2 \ldots N\}$.

1. Trouver trois réels α, β et γ tels que
$$\frac{1}{4x - x^3} = \frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{x-2} + \frac{\gamma}{x+2}.$$
2. En déduire la solution exacte de l'équation différentielle (1). Vérifier qu'elle est de la forme $x(t) = 2/\sqrt{1 + \delta e^{-80t}}$. Déterminer δ en fonction de x_0.
3. Pour résoudre numériquement l'équation différentielle (1), on considère d'abord le schéma d'Euler explicite
$$x_{i+1} = x_i + \Delta t\, f(x_i).$$
Programmer ce schéma dans Scilab (donner aussi le programme sur la copie).
4. Tracer sur un même graphe la solution exacte et la solution numérique pour $N = 30$, $N = 100$, $N = 1000$ et pour $x_0 = 0,001$ (donner sur la copie l'allure des courbes).
5. Déterminer expérimentalement la valeur de N en dessous de laquelle le schéma devient instable. Pouvait-on prévoir ce résultat ?

II) Schéma d'Euler implicite

1. Pour résoudre l'équation différentielle (1), on considère maintenant le schéma d'Euler implicite
$$x_{i+1} = x_i + \Delta t\, f(x_{i+1}).$$
Pour calculer la solution y de l'équation
$$x + \Delta t\, f(y) - y = 0$$
on propose d'utiliser la méthode de Newton. On note $y^{(k)}$ le k-ième itéré de la méthode de Newton
$$\lim_{k \to \infty} y^{(k)} = y.$$
Exprimer $y^{(k+1)}$ en fonction de $y^{(k)}$.
2. Ecrire une fonction Scilab `y(x,dt,p)` qui calcule $y^{(p)}$. On choisira comme initialisation de la méthode $y^{(0)} = x$.
3. Programmer le schéma d'Euler implicite dans Scilab. Tracer sur un même graphe la solution exacte et la solution numérique pour $N = 30$, $N = 100$, $N = 1000$ et $p = 10$, $x_0 = 0,001$ (donner sur la copie l'allure des courbes). Conclusion ?

III) Interpolation

On cherche maintenant un schéma pour résoudre (1) de la forme

$$x_{i+1} = x_i + \Delta t \Phi(x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \Delta t).$$

Pour cela, on va approcher par interpolation la fonction x sur la subdivision $S = \{t_{i-1} = (i-1)\Delta \mathrm{t}, t_i = i\Delta t, t_{i+1} = (i+1)\Delta t\}$.

1. Calculer les polynômes de Lagrange L_{i-1}, L_i et L_{i+1} associés à la subdivision S.
2. Calculer le polynôme d'interpolation P qui vérifie
$$P(t_j) = x_j, \quad j = i-1, i, i+1.$$
3. $P(t)$ étant une approximation de $x(t)$ au voisinage de $t = t_i$, il s'ensuit que $P'(t_{i+1})$ est une approximation de $x'(t_{i+1})$. En déduire une approximation de l'équation différentielle (1) en posant $P'(t_{i+1}) = f(x_{i+1})$. Expliciter la fonction Φ. Vérifier que le schéma obtenu est implicite.
4. Programmer dans Scilab le schéma de la question 3. Pour démarrer le schéma, on prendra $x_1 = x(\Delta t)$ (on pourrait aussi calculer x_1 avec le schéma de l'exercice II). L'équation implicite sera résolue avec la méthode de Newton.
5. Tracer sur un même graphe la solution exacte et la solution numérique pour $N = 30$, $N = 100$, $N = 1000$, $p = 10$ et pour $x_0 = 0,001$ (donner sur la copie l'allure des courbes). Conclusion ?