Interpolation par fonctions splines, sujet A

On considère sur un intervalle $[a, b]$ une subdivision

$$a = x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b.$$

On note $y_i = f(x_i)$. Pour une fonction f définie sur $[a, b]$ la spline cubique d'interpolation associée est notée σ. La spline cubique est définie par les relations suivantes :

- (a) Sur chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 1 \ldots n-1$, σ est un polynôme de degré ≤ 3.
- (b) $\sigma''(a) = \sigma''(b) = 0$.
- (c) σ est de classe C^2 sur $[a, b]$.

Nous allons montrer qu'il existe une unique spline. On pose $M_i = \sigma''(x_i)$. En particulier, $M_1 = M_n = 0$. Sur l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$, σ est alors donnée par

$$\begin{aligned}
\sigma(x) \quad = \quad & 1/6\, \frac{(x_{i+1} - x)\,(x - x_i)\,(x - 2\,x_{i+1} + x_i)}{x_{i+1} - x_i} M_i \\
& -1/6\, \frac{(x_{i+1} - x)\,(x - x_i)\,(x - 2\,x_i + x_{i+1})}{x_{i+1} - x_i} M_{i+1} \\
& + \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} x + \frac{y_i x_{i+1} - x_i y_{i+1}}{x_{i+1} - x_i}
\end{aligned}$$

de plus

$$\begin{aligned}
\sigma'(x_i^+) \quad &= \quad -1/3\, M_i\,(x_{i+1} - x_i) - 1/6\, M_{i+1}\,(x_{i+1} - x_i) + \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} \\
\sigma'(x_{i+1}^-) \quad &= \quad 1/6\, M_i\,(x_{i+1} - x_i) + 1/3\, M_{i+1}\,(x_{i+1} - x_i) + \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}
\end{aligned}$$

le raccord des dérivées au point x_i implique donc

$$\begin{aligned}
1/6\, M_{i+1}\,(x_{i+1} - x_i) + 1/6\, M_{i-1}\,(x_i - x_{i-1}) + \quad & 1/3\, M_i\,(x_{i+1} - x_{i-1}) \\
= \quad & \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} - \frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}
\end{aligned}$$

Pour simplifier, considérons une subdivision régulière

$$h = (b - a)/(n - 1), \quad x_i = a + (i - 1)h, \quad i = 1 \ldots n.$$

les M_i sont alors solutions de

$$(D + A) \begin{bmatrix} M_1 \\ \vdots \\ \\ M_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{h^2} \\ \vdots \\ \\ \frac{y_{N+1} - 2y_N + y_{N-1}}{h^2} \end{bmatrix},$$

où

$$A = \begin{bmatrix} 2/3 & 1/6 & & & 0 \\ 1/6 & 2/3 & 1/6 & & \\ & 1/6 & \ddots & \ddots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & 1/6 \\ 0 & & & 1/6 & 2/3 \end{bmatrix},$$

D est une matrice nulle sauf pour les premiers et derniers termes de la diagonale

$$D = \begin{bmatrix} \lambda & & & \\ & 0 & 0 & \\ & & \ddots & \\ & 0 & 0 & \\ & & & \lambda \end{bmatrix}$$

et λ un nombre très grand. Il suffit donc de résoudre un système tridiagonal pour trouver les M_i

1. Vérifier les formules proposées. En particulier vérifier que σ est bien de classe C^2. Quelle valeur prenez-vous pour λ ? Vérifier alors que les valeurs de y_0 et y_{N+1} ne jouent aucun rôle.
2. Montrer que $D + A$ est inversible, ce qui prouve l'existence et l'unicité de σ. Comment résoudre efficacement un système linéaire tridiagonal dans scilab ?
3. On considère une fonction Scilab `[x,y]=spline(xi,yi,ng)` qui renvoie deux vecteurs lignes `x` et `y`. Le vecteur `x` contient `ng * (n-1)` points dans l'intervalle $[a, b]$ et le vecteur `y` les valeurs de la spline en ces points. Les vecteurs `xi`, `yi` sont des vecteurs lignes. Cette fonction est programmée et testée dans ce fichier `http://www-irma.u-strasbg.fr/~helluy/CSL2/spline1.sce`. Ce programme contient une erreur. Expliquer comment vous l'avez trouvée et corrigée. Expliquer les lignes suivantes du programme :
   ```
   t1y=[0,yi(1:$-1)]
   tm1y=[yi(2:$),0]
   ```
4. On voudrait pouvoir imposer des valeurs de $M_1 = \alpha$ et $M_n = \beta$ non nécessairement nulles. Modifier le programme dans ce but.
5. Afin de certifier le programme, on souhaite le tester dans un cas très simple avec $n = 3$, $\alpha = \beta = 2$ et $f(x) = x^2 + x + 1$. Sans utiliser Scilab, calculer σ dans ce cas, justifier les calculs. Vérifier que le programme Scilab donne exactement le même résultat.
6. Pour $[a, b] = [-1, 1]$ et
   $$f(x) = \frac{1}{0.1 + x^2}$$
   comparer f et σ sur le même graphique pour $n = 8$. Reproduire schématiquement le graphe sur la copie. Commentaires ?
7. Calculer numériquement le taux de convergence lorsque $n \to \infty$ pour la norme du sup. Expliquer la procédure.
8. Même question avec
   $$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \geq 0 \\ -1 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$
   Conclusion ?