

Interpolation par fonctions splines, sujet B

On considère sur un intervalle $[a, b]$ une subdivision

$$a = x_1 < x_2 < \dots < x_n = b.$$

On note $y_i = f(x_i)$. Pour une fonction f définie sur $[a, b]$ la spline cubique d'interpolation associée est notée σ . La spline cubique est définie par les relations suivantes :

- (a) Sur chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 1 \dots n-1$, σ est un polynôme de degré ≤ 3 .
- (b) $\sigma''(a) = \sigma''(b) = 0$.
- (c) σ est de classe C^2 sur $[a, b]$.

Nous allons montrer qu'il existe une unique spline. On pose $M_i = \sigma''(x_i)$. En particulier, $M_1 = M_n = 0$. Sur l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$, σ est alors donnée par

$$\begin{aligned} \sigma(x) = & \frac{1}{6} \frac{(x_{i+1} - x)(x - x_i)(x - 2x_{i+1} + x_i)}{x_{i+1} - x_i} M_i \\ & - \frac{1}{6} \frac{(x_{i+1} - x)(x - x_i)(x - 2x_i + x_{i+1})}{x_{i+1} - x_i} M_{i+1} \\ & + \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} x + \frac{y_i x_{i+1} - x_i y_{i+1}}{x_{i+1} - x_i} \end{aligned}$$

de plus

$$\begin{aligned} \sigma'(x_i^+) &= -1/3 M_i (x_{i+1} - x_i) - 1/6 M_{i+1} (x_{i+1} - x_i) + \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} \\ \sigma'(x_{i+1}^-) &= 1/6 M_i (x_{i+1} - x_i) + 1/3 M_{i+1} (x_{i+1} - x_i) + \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} \end{aligned}$$

le raccord des dérivées au point x_i implique donc

$$\begin{aligned} 1/6 M_{i+1} (x_{i+1} - x_i) + 1/6 M_{i-1} (x_i - x_{i-1}) + & \quad 1/3 M_i (x_{i+1} - x_{i-1}) \\ = & \quad \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} - \frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \end{aligned}$$

Pour simplifier, considérons une subdivision régulière

$$h = (b - a)/(n - 1), \quad x_i = a + (i - 1)h, \quad i = 1 \dots n.$$

les M_i sont alors solutions de

$$(D + A) \begin{bmatrix} M_1 \\ \vdots \\ M_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{h^2} \\ \vdots \\ \frac{y_{N+1} - 2y_N + y_{N-1}}{h^2} \end{bmatrix},$$

où

$$A = \begin{bmatrix} 2/3 & 1/6 & & & 0 \\ 1/6 & 2/3 & 1/6 & & \\ & 1/6 & \ddots & \ddots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & 1/6 \\ 0 & & & 1/6 & 2/3 \end{bmatrix},$$

D est une matrice nulle sauf pour les premiers et derniers termes de la diagonale

$$D = \begin{bmatrix} \lambda & & & \\ & 0 & & 0 \\ & & \ddots & \\ & 0 & & 0 \\ & & & & \lambda \end{bmatrix}$$

et λ un nombre très grand. Il suffit donc de résoudre un système tridiagonal pour trouver les M_i

1. Vérifier les formules proposées. En particulier vérifier que σ est bien de classe C^2 . Quelle valeur prenez-vous pour λ ? Vérifier alors que les valeurs de y_0 et y_{N+1} ne jouent aucun rôle.
2. Montrer que $D + A$ est inversible, ce qui prouve l'existence et l'unicité de σ . Comment résoudre efficacement un système linéaire tridiagonal dans Scilab ?
3. On considère une fonction Scilab `[x,y]=spline(xi,yi,ng)` qui renvoie deux vecteurs lignes x et y . Le vecteur x contient `ng * (n-1)` points dans l'intervalle $[a, b]$ et le vecteur y les valeurs de la spline en ces points. Les vecteurs xi, yi sont des vecteurs lignes. Cette fonction est programmée et testée dans ce fichier <http://www-irma.u-strasbg.fr/~helluy/CSL2/spline2.sce>. Ce programme contient une erreur. Expliquer comment vous l'avez trouvée et corrigée. Expliquer les lignes suivantes du programme :
`t1y=[0,yi(1:$-1)]`
`tm1y=[yi(2:$),0]`
4. On voudrait pouvoir imposer des valeurs de $M_1 = \alpha$ et $M_n = \beta$ non nécessairement nulles. Modifier le programme dans ce but.
5. Afin de certifier le programme, on souhaite le tester dans un cas très simple avec $n = 3$, $\alpha = \beta = -2$ et $f(x) = 3 - x^2$. Sans utiliser Scilab, calculer σ dans ce cas, justifier les calculs. Vérifier que le programme Scilab donne exactement le même résultat.
6. Pour $[a, b] = [-1, 1]$ et

$$f(x) = \sin(\pi x)$$

comparer f et σ sur le même graphique pour $n = 4$. Reproduire schématiquement le graphe sur la copie. Commentaires ?

7. Calculer numériquement le taux de convergence lorsque $n \rightarrow \infty$ pour la norme du sup. Expliquer la procédure.
8. Même question avec

$$f(x) = |x|.$$

Conclusion ?