CS L2 Calcul scientifique CC3 2015. Notes personnelles autorisées, durée 1h30.

I) Méthode de Gauss-Lobatto

On souhaite construire et étudier une méthode d'intégration numérique J sur l'intervalle $[-1,1]$. Cette méthode est de la forme

$$J(f) = \alpha f(-1) + \beta f(-\xi) + \beta f(\xi) + \alpha f(1) \simeq I(f) = \int_{-1}^{1} f(t)dt. \tag{1}$$

1. Dans un premier temps, ξ est un réel donné dans $]0,1[$. Déterminer les réels α et β en fonction de ξ pour que la formule soit exacte pour des polynômes de degré ≤ 2. La formule est-elle valable pour des polynômes de degré 3 ?
2. Déterminer la valeur de ξ telle que la formule (1) soit exacte pour des polynômes de degré ≤ 5. La formule d'intégration obtenue est appelée formule de Gauss-Lobatto. Quel est l'intérêt de cette formule comparée à la formule de Gauss-Legendre ?
3. Déduire de (1) une formule d'intégration numérique $J_{a,b}$ pour approcher une intégrale sur un intervalle $[a,b]$ quelconque
$$J_{a,b}(g) \simeq I_{a,b}(g) = \int_a^b g(x)dx.$$
4. On admet qu'il existe une constante C, indépendante de a et b et un point $y \in [a,b]$ tels que
$$I_{a,b}(g) - J_{a,b}(g) = C(b-a)^7 g^{(6)}(y).$$
Calculer la constante C.
5. Ecrire la formule composite associée à la formule de Gauss-Lobatto.
6. On souhaite calculer $\int_0^1 \exp(x-1)dx$ par la formule composite de Gauss-Lobatto. En combien de sous-intervalles N faut-il découper l'intervalle $[0,1]$ pour obtenir une précision de $\varepsilon = 10^{-6}$?

II) Méthode de Newton

On souhaite résoudre l'équation

$$f(x) = \tan x - 1 + x = 0 \tag{2}$$

par la méthode de Newton

$$x_{n+1} = g(x_n).$$

1. Montrer que f' et f'' sont > 0 sur $[0,\pi/4]$. Déterminer la fonction d'itération $g(x)$.
2. Montrer que (2) admet une unique solution ξ dans l'intervalle $]0,\pi/4[$.
3. Montrer que si $x_0 = \pi/4$ alors la suite x_n converge vers ξ.
4. Combien faut-il d'itérations n pour assurer que $|x_n - \xi| \leq \varepsilon = 10^{-6}$?

III) Méthode de Jacobi.

Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice réelle $N \times N$. On suppose que A est à diagonale strictement dominante :

$$\forall i = 1 \ldots n, \quad |a_{i,i}| > \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|.$$

1. Montrer que A est inversible.
2. Soit $x \in \mathbb{R}^N$. On pose
$$\|x\|_\infty = \sup_{i=1\ldots N} |x_i|.$$
Montrer que $x \mapsto \|x\|_\infty$ est une norme vectorielle.
3. Pour résoudre le système linéaire
$$Ax = b, \tag{3}$$
on considère une suite de vecteurs $x^{(n)} \in \mathbb{R}^N$, $n \in \mathbb{N}$. Les composantes du vecteur $x^{(n+1)}$ sont données à partir de celles du vecteur $x^{(n)}$ par
$$x_i^{(n+1)} = \frac{1}{a_{i,i}} \left(b - \sum_{j \neq i} a_{i,j} x_j^{(n)} \right) \Leftrightarrow x^{(n+1)} = G(x^{(n)}).$$
Montrer que G est une application contractante pour la norme $\|\|_\infty$.
4. En déduire que la suite de vecteurs $x^{(n)}$ converge vers l'unique solution de (3).