Approximation des équations différentielles

Exercice 1 : Programmation de la méthode d'Euler

1. Installer puis lancer scilab. S'entraîner à taper quelques commandes (voir `http://www-irma.u-strasbg.fr/~helluy/CSL2/scilab-quickref.pdf`).
2. Écrire un programme scilab pour résoudre, par la méthode d'Euler, l'équation différentielle
$$x'(t) = x(t), \quad t \in [0,1] \quad x(0) = 1.$$
Tracer sur un même graphe la solution exacte et la solution approchée pour plusieurs valeurs de N, le nombre de points de discrétisation de l'intervalle $[0,1]$
3. On note $\Delta t = 1/N$ et $x_i \simeq x(i\Delta t)$ l'approximation obtenue. Vérifier numériquement que
$$x_N = \exp(1) + O(\Delta t^k).$$
Déterminer la valeur de k. Expliquer votre approche.
4. Refaire la question 3 avec la méthode d'Euler améliorée, qui s'écrit
$$x_{i+1/2} = x_i + \frac{\Delta t}{2} f(x_i), \quad x_{i+1} = x_i + \Delta t f(x_{i+1/2}).$$
Conclusions ?
5. Refaire la question 3 pour les méthodes proposées à l'exercice 5.

Exercice 2 : Modèle de Lotka-Volterra

On considère le modèle proie-prédateur suivant `http://fr.wikipedia.org/wiki/%C3%89quations_de_Lotka-Volterra`

$$\begin{aligned} x' &= ax - bxy, \\ y' &= -cy + dxy, \end{aligned}$$

où $x(t)$ est le nombre de proies et $y(t)$ le nombre de prédateurs à l'instant t (exprimé en jours). Les constantes du modèles a, b, c, d sont toutes > 0.

1. Calculer les constantes a, b, c, d de façon que (i) $(x, y) = (100, 10)$ soit un point d'équilibre du système, (ii) la population x double tous les 90 jours si $y = 0$, (iii) la population y est diminuée de 90% tous les 30 jours si $x = 0$.
2. Calculer l'équation des courbes solutions dans le plan (x, y). Donner graphiquement l'allure de ces courbes (portrait de phase).
3. Tracer quelques courbes du portrait de phase au moyen d'un programme scilab utilisant la méthode d'Euler explicite. Préciser l'intervalle de temps que vous avez utilisé pour vos simulations, ainsi que le pas de temps Δt. Conclusions ?
4. Programmer la méthode d'Euler améliorée. Vérifier qu'elle est plus précise, en expliquant votre démarche. Tracer quelques orbites.
5. Programmer la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4. Vérifier qu'elle est encore plus précise. Tracer quelques orbites.
6. On modifie l'équation des proies pour prendre en compte la quantité limitée de nourriture qu'elles peuvent se partager
$$x' = ax - bxy - \varepsilon x^2.$$
Calculer ε pour que la population stable maximale de proie soit égale à $x = 200$ lorsque $y = 0$.
7. Tracer numériquement le portrait de phase du modèle amélioré. Conclusion.

Exercice 3 : Équations différentielles

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que l'application $x \mapsto \lambda x$ est globalement Lipschitzienne sur $\mathbb{R}$. Résoudre l'équation différentielle $x' = \lambda x, \quad x(0) = 1$. Même question avec $x \mapsto \lambda |x|$.
2. Montrer que $x \mapsto x^2$ est localement Lipschitzienne. Résoudre $x' = x^2, \quad x(0) = 1$. Conclusion ?
3. Montrer que l'équation différentielle $x' = \sqrt{|x|}, \quad x(0) = 0$ admet au moins deux solutions. Conclusion ?
4. Résoudre les équations différentielles suivantes :
   (a) $tx' - x = x^3$
   (b) $txx' = 1 - t^2$
   (c) $(1 + e^t)xx' = e^x$, $x(0) = 1$
   (d) $x' \sin(t) = x \ln(x)$, $x(\pi/2) = 1$.
   (e) $(t^2 + 1)x' + 2tx = 3t^2 + 1$, $x(0) = 3$.
   (f) $x' - (2t - 1/t)x = 1$, $(t > 0)$.
   (g) $x' + 2x = t^2$.

Exercice 4 : Développements limités

1. Montrer qu'en $x = 0$, $f(x) = x^n \sqrt{|x|} = o(x^n)$ mais que $f(x) \neq O(x^{n+1})$.
2. Soit f une fonction de classe $C^{n+1}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Montrer que
$$f(x) = o(x^n) \Leftrightarrow f(x) = O(x^{n+1}).$$
3. Soit f une application très régulière de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et x une application très régulière de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soit g la fonction définie par $g(t) = f(t, x(t))$.
   (a) Calculer $g'(t)$ et $g''(t)$.
   (b) en déduire les développements de Taylor-Young et Taylor-Lagrange de $g(t)$ au voisinage de $t = 0$.
4. Soit f une fonction $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $|f'|$ est bornée. Montrer que f est Lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.
5. Soit f une fonction $C^1([a, b], \mathbb{R})$. Montrer que f est Lipschitzienne sur $[a, b]$.
6. Montrer qu'une fonction Lipschitzienne est continue. Réciproque ?

Exercice 5 : Ordre des schémas

1. Pour résoudre l'équation différentielle
$$x'(t) = f(x(t)),$$
on considère le schéma
$$\begin{aligned} x_* &= x_i + \alpha \Delta t f(x_i), \\ x_{i+1} &= x_i + \Delta t f(x_*). \end{aligned}$$
Pour quelle valeur de α ce schéma est-il d'ordre 2 ?
2. Pour résoudre l'équation différentielle
$$x'(t) = f(x(t)),$$
on considère le schéma
$$\begin{aligned} x_* &= x_i + \Delta t f(x_i), \\ x_{i+1} &= x_i + \frac{\Delta t}{2} \left(f(x_i) + f(x_*) \right). \end{aligned}$$
Montrer que ce schéma est d'ordre 2.

3. Pour résoudre l'équation différentielle
$$x'(t) = f(x(t)),$$
on considère le schéma
$$\begin{aligned} x_* &= x_i + \alpha \Delta t f(x_i), \\ x_{i+1} &= x_* + \beta \Delta t f(x_*). \end{aligned}$$
Calculer α et β pour que le schéma soit d'ordre 2.
4. Montrer (à l'aide de Maple) que la méthode RK4 est d'ordre 4.

Exercice 6 : Schéma multipas

1. Pour résoudre l'équation différentielle
$$x'(t) = f(x(t)),$$
on considère le schéma
$$x_{i+1} = x_{i-1} + 2\Delta t f(x_i).$$
   (a) Montrer que ce schéma est d'ordre 2.
   (b) Comment initialiser le calcul ?
   (c) écrire le programme fortran ou scilab correspondant.
2. Soit y une fonction de classe $C^\infty(\mathbb{R})$. Trouver les coefficients α_i, $i \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ tels que la formule
$$y'(t) \simeq \sum_{i=-2}^{2} \alpha_i y(t + i\Delta t)$$
soit la plus précise possible.

Exercice 7 : Convergence du schéma d'Euler (*)

On se propose de montrer la convergence de la méthode d'Euler explicite pour résoudre le problème de Cauchy sur l'intervalle $[0, T]$
$$\begin{aligned} x'(t) &= f(x(t)), \\ x(0) &= x_0. \end{aligned}$$
La fonction f est supposée de classe $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et Lipschitzienne de constante L. Nous posons donc ici, pour $h > 0$,
$$\Phi(x, h) = f(x),$$
et la méthode s'écrit
$$x_{i+1} = x_i + h\Phi(x_i, h).$$
1) Montrer que x est de classe C^2 sur $[0, T]$.
2) Soit x la solution du problème de Cauchy. Montrer qu'il existe $\theta(t, h)$ dans l'intervalle $]0, 1[$ tel que
$$\frac{x(t+h) - x(t)}{h} - \Phi(x(t), h) = \frac{h}{2} x''(t + \theta h)$$
(bien sûr, on suppose que $t + h \in [0, T]$ et que h est assez petit...)
3) En déduire qu'il existe une constante C telle que
$$\forall t \in [0, T-h], \quad \left| \frac{x(t+h) - x(t)}{h} - \Phi(x(t), h) \right| \leq Ch.$$
4) L'erreur à l'étape i est définie par
$$e_i = x_i - x(ih)$$

(noter que $e_0 = 0$). L'erreur globale de la méthode est donnée par

$$e(h) = \max_{0 \leq i \leq T/h} |e_i| \,.$$

Montrer que pour $i \leq T/h - 1$,

$$|e_{i+1}| \leq (1 + Lh) \, |e_i| + Ch^2.$$

5) Montrer que pour tout entier i dans $[0, T/h]$,

$$|e_i| \leq e^{iLh} Cih^2.$$

(Indication : utiliser, pour $s > 0$, l'inégalité $1 + s \leq e^s$.)
6) Montrer que

$$e(h) \leq e^{LT} CTh.$$

En déduire que la méthode d'Euler converge à l'ordre 1, c'est à dire que

$$e(h) = O(h).$$