Intégration numérique

TP Gauss-Legendre

On note $J_N(f)$ l'approximation par une méthode d'intégration composite de $I(f) = \int_0^1 f(t)dt$ sur N intervalles.

1. Écrire un programme qui réalise ce calcul. Décrire la programmation.
2. Tester la précision de la méthode pour la méthode des rectangles et de Simpson. On prendra $f(x) = \exp(x)$. Vérifier numériquement l'ordre de la méthode en traçant le logarithme de l'erreur en fonction du logarithme de N.
3. Même question pour la méthode de Gauss-Legendre à 2 ou 3 points.
4. Que se passe-t-il lorsqu'on choisit $f(t) = \ln(t)$?

TP intégration en dimension 2

On souhaite calculer $I(f) = \int\int_{(x,y)\in\Omega} f(x,y)dxdy$ où Ω est le domaine suivant

$$\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \varepsilon < x^2 + y^2 < 2\right\}, \quad \varepsilon > 0.$$

1. On note $\hat{\Omega} =]0,1[\times]0,1[$. Trouver un difféomorphisme φ qui transforme $\hat{\Omega}$ en Ω. Rappeler la formule de changement de variables dans une intégrale double qui permet de transformer l'intégrale sur Ω en une intégrale sur $\hat{\Omega}$.
2. Décrire rapidement (une demi-page maximum) la méthode composite $J_N(f)$ pour calculer numériquement $I(f)$. Ici, N désigne le nombre de subdivisions dans chaque direction sur le carré $\hat{\Omega}$.
3. Application : $f(x,y) = x^2 \frac{\ln\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}{x^2+y^2}$, $\varepsilon = 1$. Calculer la valeur exacte de $I(f)$. Calculer numériquement l'ordre de convergence pour la méthode des trapèzes et la méthode de Gauss-Legendre à trois points.
4. Même question pour $\varepsilon = 0$. Conclusion ?

TP intégration des fonctions singulières

On souhaite étudier des méthodes pour calculer des intégrales singulières. Pour les tests, on prendra

$$I(f) = \int_0^1 \ln(x)dx.$$

1. Construire un polynôme P tel que $P(0) = 0$, $P(1) = 1$ et $P^{(k)}(0) = 0$ pour $k = 1 \dots 3$
2. Montrer que
$$I(f) = I(t \mapsto \ln(P(t))P'(t)) = \int_0^1 \ln(P(t))P'(t)dt.$$
3. Montrer que $t \mapsto \ln(P(t))P'(t)$ est de classe C^2 sur $[0,1]$
4. Programmer la méthode des rectangles composites pour calculer la nouvelle intégrale. Montrer et vérifier numériquement que cette méthode est d'ordre 2.

5. Adapter l'approche en utilisant la méthode composite de Gauss-Legendre à 2 points.
6. Calculer numériquement
$$\int_0^1 \exp(\cos(2\pi x))dx$$
par la méthode des rectangles composites. Quel est l'ordre de la méthode dans ce cas ? Pourquoi ?
7. En déduire une autre méthode d'ordre élevé, basé sur la méthode des rectangles, pour calculer les intégrales singulières.

TD Exercice 1

On cherche une méthode d'intégration numérique de la forme
$$\int_0^1 f(t) \simeq \alpha f(0) + \beta f'(\gamma),$$
où γ est un point de l'intervalle $[0, 1]$.

1. On suppose γ donné. Déterminer α et β pour que la méthode soit exacte pour des polynômes de degré ≤ 1
2. Comment choisir γ pour que la formule soit exacte pour des polynômes de degré ≤ 2 ?
3. Que devient la formule sur un intervalle $[a, b]$ quelconque ? (faire le changement de variables $x = (b - a)t + a$)
4. Formule d'erreur ? Méthode composite associée ?

TD Exercice 2

On cherche une méthode d'intégration numérique de la forme
$$\int_0^3 f(t)dt \simeq \alpha f(0) + \beta f(1) + \gamma f(2),$$

1. Déterminer α, β et γ pour que la méthode soit exacte pour des polynômes de degré ≤ 2
2. En déduire une méthode de résolution de l'équation différentielle $x' = f(x)$. (Indication : $x(t) - x(0) = \int_0^t f(x(s))ds$.)
3. Quel est l'ordre de cette méthode ?

TD Exercice 3

1) Soit f une application de classe C^2 sur l'intervalle $[0, 1]$. On rappelle qu'il existe alors un $t_0 \in [0, 1]$ (dépendant de f) tel que
$$\int_0^1 f(t)dt = f(\frac{1}{2}) + \frac{1}{24}f''(t_0)$$

Déduire de cette propriété que si g est une application de classe C^2 sur l'intervalle $[a, b]$ alors on peut trouver $x_0 \in [a, b]$ tel que

$$\int_a^b g(x)dx = (b-a)g(\frac{a+b}{2}) + \frac{(b-a)^3}{24} g''(x_0)$$

(faire le changement de variable $x = t(b-a) + a$)

2) On se donne maintenant une application f de classe C^2 sur un intervalle $[a, b]$. On pose $I(f) = \int_a^b f(x)dx$. Soit $J_N(f)$ l'approximation de $I(f)$ par la méthode des rectangles composite à N points :

$$J_N(f) = \frac{b-a}{N} \sum_{i=1}^{N} f(\frac{i-1/2}{N}(b-a) + a)$$

montrer qu'il existe des points $x_i \in [(b-a)\frac{i-1}{N} + a, (b-a)\frac{i}{N} + a]$ $(1 \leq i \leq N)$ tels que

$$\int_a^b f(x)dx = J_N(f) + \frac{(b-a)^3}{24N^2} \cdot \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} f''(x_i)$$

3) En déduire qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$\int_a^b f(x)dx = J_N(f) + \frac{(b-a)^3}{24N^2} f''(c)$$

4) Comment choisir N pour être sûr que $J_N(f)$ soit une approximation à 10^{-6} près de $I(f)$ si $f(x) = \exp(x)$ et $[a, b] = [0, 2]$?

5) Que se passe-t-il selon vous si l'on applique la même méthode d'intégration numérique à $f(x) = \ln(x)$ sur l'intervalle $[0, 2]$?

TD Exercice 4

Le but de ce problème est l'évaluation numérique de l'intégrale suivante : $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(1+x)\sqrt{x(1-x)}}$.

- 1. Dire pourquoi on ne peut appliquer à I ni la méthode des trapèzes, ni celle de Simpson.
- 2. On cherche alors une formule du type :

$$\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x(1-x)}} \mathrm{d}x = A_0 f(0) + A_1 f\left(\frac{1}{2}\right) + A_2 f(1) + R_1(f). \tag{0.1}$$

  Déterminer les coefficients A_i de sorte que $R_1(f)$ soit nul pour f appartenant à l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n, n aussi grand que possible. Pour faciliter les calculs, on utilisera la relation de récurrence suivante, qu'on ne cherchera pas à démontrer : si $J_k = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^k}{\sqrt{x(1-x)}} \mathrm{d}x$, alors :

$$\begin{cases} J_0 & = & \pi \\ J_k & = & \dfrac{2k-1}{2k} J_{k-1} \end{cases}$$

Que vaut n ?
On suppose qu'il existe $\xi \in [0,1]$ tel que $\forall f \in \mathcal{C}^{n+2}([0;1]) \quad : \quad R_1(f) = C \; f^{n+1}(\xi)$. Déterminer C.
Application numérique à I : quelle approximation I_1 de I obtient-on ? Donner une majoration de $|R_1(f)|$.

TD Exercice 5

Soit la formule d'intégration numérique suivante :

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = a\ f(-1) + b\ f(0) + c\ f(1) + d\ f'(0) + R(f),$$

où f' désigne la fonction dérivée de f.

1. Quel est le système que doivent résoudre $a,\ b,\ c,\ d$ pour que cette formule soit exacte ($R(f) = 0$) sur l'espace vectoriel des polynômes de degré le plus élevé possible ? Noter A la matrice de ce système.
2. Quelle est la décomposition LU de A ?
3. Résoudre le système. Quelle est cette formule, quel est son degré de précision et la forme de l'erreur ?

TD Exercice 6

1. On cherche à établir la formule de quadrature suivante :

   $$\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = H\left[f(x_1) + f(x_2) + f(x_3)\right] + R(f)$$

   de sorte qu'elle soit exacte si f appartient à l'espace vectoriel des polynômes de degré n, n aussi grand que possible.
   - (a.) Ecrire les équations déterminées par $R(x^k) = 0, \quad k = 0,\ 1,\ 2,\ 3.$
   - (b.) Soit $P(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = x^3 + c_1x^2 + c_2x + c_3$.
     Vérifier que :

     $$\begin{cases} c_1 & = & -(x_1 + x_2 + x_3) \\ c_2 & = & x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 \\ c_3 & = & -x_1x_2x_3 \end{cases} \tag{0.2}$$

     En utilisant les équations du $(a.)$, montrer que :

     $$P(x) = x^3 - \frac{x}{2}$$

     En déduire $x_1,\ x_2,\ x_3$ et la formule de quadrature.
     Quel est son degré de précision (noté d) ?

— (c.) Déterminer $R(f)$ en prenant $f(x) = x^{d+1}$ et en supposant que $R(f) = Kf^{(d+1)}(\xi)$, $\xi \in [-1, 1]$.

2. En déduire la formule de quadrature pour l'approximation de $\displaystyle\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$, ainsi que l'erreur.
3. Application numérique : Calculer une approximation de $I = \displaystyle\int_0^1 \sin(x)\,\mathrm{d}x$.
4. Comparer le résultat de la question précédente à celui obtenu par la formule de Simpson appliquée à I. Pouvait-on le prévoir grâce aux termes d'erreur ?