

Interpolation

Polynômes de Lagrange

Soient les points suivants $(-1, 0)$, $(0, -1)$, $(1, 0)$, $(2, -1)$. Trouver le polynôme d'interpolation de degré ≤ 3 passant par ces points :

1. Par une méthode d'identification,
2. Par une méthode de mise en facteur,
3. Avec les polynômes de Lagrange.

Matrice de Vandermonde

1. Écrire le système linéaire qui définit le polynôme d'interpolation de degré 3 passant par les points de coordonnées (x_0, y_0) , (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3) .
2. Calculer le déterminant de la matrice V de ce système linéaire (on pourra effectuer des manipulations de lignes et de colonnes). La matrice V est appelée matrice de Vandermonde.
3. Calculer dans le cas général (i.e. en dimension quelconque) le déterminant d'une matrice de Vandermonde.

Erreur d'interpolation

1) Soient $f \in C^{n+1}([a, b])$, $a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq b$, P_n le polynôme d'interpolation de f aux points (x_i) . On se propose de montrer

$$f(x) - P_n(x) = \frac{(x - x_0) \cdots (x - x_n)}{(n + 1)!} f^{(n+1)}(\xi) \text{ avec } a \leq \xi \leq b$$

a) Soit $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tel que g' existe. Montrer que si g a $(n + 2)$ zéros distincts alors g' a au moins $(n + 1)$ zéros distincts.

b) En considérant $W(t) = f(t) - P_n(t) - (t - x_0) \cdots (t - x_n)K(x)$ où K est tel que $W(x) = 0$ démontrer le résultat cherché.

2) On a donc

$$|f(x) - P_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n + 1)!} \left| \prod_{i=0}^n (x - x_i) \right|$$

On cherche à majorer $|\prod_{i=0}^n (x - x_i)|$ dans le cas d'une subdivision régulière de pas h . On pose $\theta(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i)$, $h = 1$ et $x_0 = 0$ (pour simplifier).

a) Montrer que $\theta(x + 1) = \theta(x) \frac{x+1}{x-n}$

b) En déduire que le max de $|\theta(x)|$ est réalisé pour $x_0 \leq x \leq x_1$

c) Montrer que $\max_{x_0 \leq x \leq x_1} |\theta(x)| \leq \frac{n!h^{n+1}}{4}$

d) En déduire que

$$|f(x) - P_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{4(n + 1)} h^{n+1}$$

3) On souhaite écrire une table de valeurs de $f(x) = \int_0^x e^{-t^2/2} dt$ pour une subdivision de pas h de l'intervalle $[0, 1]$. Comment doit-on choisir h pour que l'interpolation de Lagrange à 3 points donne une approximation de f à 10^{-6} près ?

4) Soit $\arccos$ la détermination de la fonction inverse de $\cos$ définie par $\theta = \arccos x \Leftrightarrow x \in [0, \pi]$ et $x = \cos \theta$

a) On pose $Q_n(x) = \cos(n \arccos x)$. Montrer que les fonctions Q_n sont orthogonales sur l'intervalle $[-1, 1]$ relativement au poids $w(x) = \sqrt{1-x^2}$, le produit scalaire étant défini par $\langle f, g \rangle := \int_{-1}^1 f(t)g(t)w(t)dt$.

b) Montrer que $\langle Q_n, Q_n \rangle = \frac{\pi}{2}$ si $n \geq 1$ et que $\langle Q_0, Q_0 \rangle = \pi$.

c) Montrer que Q_n est un polynôme de degré n vérifiant $Q_{n+1}(x) = 2xQ_n(x) - Q_{n-1}(x)$ (polynômes de Tchebychev)

5) Soit Q_n le $n^{\text{ième}}$ polynôme de Tchebychev

a) Montrer que Q_n a des zéros simples aux n points

$$x_k = \cos \frac{(2k-1)\pi}{2n} \quad k = 1 \cdots n$$

b) Montrer que Q_n atteint ses extrema sur l'intervalle $[-1, 1]$ aux $n+1$ points $y_k = \cos \frac{k\pi}{n}$ $k = 0 \cdots n$ pour lesquels il prend alternativement les valeurs 1 et -1.

c) On considère $\overline{Q}_n = \frac{1}{2^{n-1}} Q_n$ (le coefficient de plus haut degré de $\overline{Q}_n$ est 1). Montrer que pour tout polynôme P de degré n , de coefficient de plus haut degré égal à 1, on a

$$\frac{1}{2^{n-1}} = \max_{-1 \leq x \leq 1} |\overline{Q}_n(x)| \leq \max_{-1 \leq x \leq 1} |P(x)|$$

d) On rappelle que

$$|f(x) - P(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \left| \prod_{i=0}^n (x - x_i) \right|$$

où P désigne le polynôme d'interpolation de f relativement à la subdivision (x_i) . Comment choisir les (x_i) pour que l'erreur d'interpolation soit la plus petite possible ?

Approximation par interpolation

On considère la fonction f donnée par la table suivante :

x	0	2	4	6
$f(x)$	0	28.28427	40	48.98979

1. Ecrire le polynôme P d'interpolation de f sur les données $\{0; 2; 4\}$. Calculer $P(3)$.
2. Faire de même avec les données $\{2; 4; 6\}$. On notera Q le polynôme. Calculer $Q(3)$.
3. Sachant que $f(x) = 20\sqrt{x}$, calculer les erreurs réelles. Etudier une majoration des erreurs théoriques dans les deux cas. Conclure.
4. Par interpolation inverse, calculer une approximation de $f^{-1}(34, 641)$.

TP Interpolation par fonctions splines

On considère sur un intervalle $[a, b]$ une subdivision

$$a = x_1 < x_2 < \dots < x_n = b.$$

On note $y_i = f(x_i)$. Pour une fonction f définie sur $[a, b]$ la spline cubique d'interpolation associée est notée σ . La spline cubique est définie par les relations suivantes :

- (a) Sur chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 1 \dots n-1$, σ est un polynôme de degré ≤ 3 .
- (b) $\sigma''(a) = \sigma''(b) = 0$.
- (c) σ est de classe C^2 sur $[a, b]$.

Nous allons montrer qu'il existe une unique spline. On pose $M_i = \sigma''(x_i)$. En particulier, $M_1 = M_n = 0$. Sur l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$, σ est alors donnée par

$$\begin{aligned} \sigma(x) = & \frac{1}{6} \frac{(x_{i+1} - x)(x - x_i)(x - 2x_{i+1} + x_i)}{x_{i+1} - x_i} M_i \\ & - \frac{1}{6} \frac{(x_{i+1} - x)(x - x_i)(x - 2x_i + x_{i+1})}{x_{i+1} - x_i} M_{i+1} \\ & + \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} x + \frac{y_i x_{i+1} - x_i y_{i+1}}{x_{i+1} - x_i} \end{aligned}$$

de plus

$$\begin{aligned} \sigma'(x_i^+) &= -1/3 M_i (x_{i+1} - x_i) - 1/6 M_{i+1} (x_{i+1} - x_i) + \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} \\ \sigma'(x_{i+1}^-) &= 1/6 M_i (x_{i+1} - x_i) + 1/3 M_{i+1} (x_{i+1} - x_i) + \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} \end{aligned}$$

le raccord des dérivées au point x_i implique donc

$$\begin{aligned} 1/6 M_{i+1} (x_{i+1} - x_i) + 1/6 M_{i-1} (x_i - x_{i-1}) + & \quad 1/3 M_i (x_{i+1} - x_{i-1}) \\ = & \quad \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} - \frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \end{aligned}$$

Pour simplifier, considérons une subdivision régulière

$$h = (b - a)/(n - 1), \quad x_i = a + (i - 1)h, \quad i = 1 \dots n.$$

les M_i sont alors solutions de

$$(D + A) \begin{bmatrix} M_1 \\ \vdots \\ M_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{h^2} \\ \vdots \\ \frac{y_{N+1} - 2y_N + y_{N-1}}{h^2} \end{bmatrix},$$

où

$$A = \begin{bmatrix} 2/3 & 1/6 & & & 0 \\ 1/6 & 2/3 & 1/6 & & \\ & 1/6 & \ddots & \ddots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & 1/6 \\ 0 & & & 1/6 & 2/3 \end{bmatrix},$$

D est une matrice nulle sauf pour les premiers et derniers termes de la diagonale

$$D = \begin{bmatrix} \lambda & & & & \\ & 0 & & 0 & \\ & & \ddots & & \\ & 0 & & 0 & \\ & & & & \lambda \end{bmatrix}$$

et λ un nombre très grand. Il suffit donc de résoudre un système tridiagonal pour trouver les M_i

1. Vérifier les formules proposées. En particulier vérifier que σ est bien de classe C^2 . Quelle valeur prenez-vous pour λ ? Vérifier alors que les valeurs de y_0 et y_{N+1} ne jouent aucun rôle.
2. Montrer que $D + A$ est inversible, ce qui prouve l'existence et l'unicité de σ . Comment résoudre efficacement un système linéaire tridiagonal dans scilab?
3. Écrire une fonction scilab $[x,y]=\text{spline}(xi,yi,ng)$ qui renvoie deux vecteurs lignes x et y . x contient $ng * (n-1)$ points dans l'intervalle $[a, b]$ et y les valeurs de la spline en ces points. Les vecteurs xi , yi sont des vecteurs lignes.
4. Pour

$$f(x) = \frac{1}{0.1 + x^2}$$

comparer f et σ sur le même graphique.

5. Calculer numériquement le taux de convergence lorsque $n \rightarrow \infty$ pour la norme du sup.
6. Même question avec

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Conclusion ?

TP interpolation

Le but de ce TP est de mettre en évidence certains phénomènes liés à l'interpolation des fonctions. Pour les calculs, on s'aidera du logiciel Scilab.

Considérons sur l'intervalle $[-1, 1]$ les fonctions suivantes :

$$\begin{aligned} f_1 & : x \rightarrow \sin(2\pi x) \\ f_2 & : x \rightarrow \frac{1}{\frac{1}{10} + x^2} \\ f_3 & : x \rightarrow \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ +1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \\ f_4 & : x \rightarrow |x| \end{aligned}$$

Un entier $N > 0$ étant donné, on considère également la subdivision régulière

$$x_i = -1 + \frac{2i}{N}, \quad 0 \leq i \leq N$$

- 1) a) Calculer le polynôme d'interpolation P de f_1 en utilisant la matrice de Vandermonde et $N = 20$. Que constate-t-on ?
- 2) En utilisant les polynômes de Lagrange calculer le polynôme d'interpolation de $f_1 \dots f_4$ pour $N = 5, 10$ et 20 . Conclusion ?
- 3) Refaire les calculs précédents en utilisant la subdivision de Tchebychev

$$x_i = \cos(i\pi/N) \quad 0 \leq i \leq N.$$

- 4) Calculer et tracer les splines minimales d'interpolation de $f_1 \dots f_4$ pour une subdivision régulière et pour $N = 5, 10$ et 20 .
- 5) Evaluer le taux de convergence de la méthode des splines pour les fonctions $f_1 \dots f_4$. Pour mesurer l'écart, on prendra une subdivision régulière $h_i = h$ et la norme

$$\|s - f\| = \sqrt{\int_{-1}^1 (s(x) - f(x))^2 dx}.$$

(pour calculer l'intégrale, utiliser la méthode des rectangles avec un grand nombre de points sur chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$).