QCM **TEST**

Calcul Scientifique L2
Mai 2016, CC3

Durée : 1 heure
Aucun document n'est autorisé. L'usage de la calculatrice est interdit.
Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter zéro, une ou plusieurs bonnes réponses. Les autres ont une unique bonne réponse.
Les réponses erronées peuvent conduire à des points négatifs.

1 Interpolation

Question 1 ♣ Soit n un entier ≥ 1. On considère la subdivision suivante de l'intervalle $[0, 1]$:

$$x_i = i/n, \quad 0 \leq i \leq n.$$

On suppose que $n = 2$. Calculer les polynômes de Lagrange $(L_i)_{0\leq i\leq n}$ associés à cette subdivision, puis parmi les affirmations suivantes, cochez celles qui sont vraies:

- [A] $L_0(1/4) = 3/8$
- [B] Pour $0 \leq i \leq n$, $L_i(x_i) = 1$
- [C] $L_0(1/2) = L_1(1/2) = 0$
- [D] $L_2(3/4) = -1/4$
- [E] *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 2 ♣ Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0, 1]$ par

$$f(x) = \mathrm{e}^{x-1}.$$

Calculer le polynôme d'interpolation P de f associé à la subdivision de la question précedente. Parmi les affirmations suivantes, cochez celles qui sont vraies:

- [A] $P(1/2) = 1/\sqrt{\mathrm{e}}$
- [B] $P(3/4) = 3/8\,\mathrm{e} + 3/4\,\mathrm{e}^{-1/2} + 1/8$
- [C] $P(1/4) = 3/8\,\mathrm{e}^{-1} + 3/4\,\mathrm{e}^{-1/2} - 1/8$
- [D] $P(0) = \mathrm{e}$
- [E] $P(0) = 1/\mathrm{e}$
- [F] *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 3 ♣ On note

$$\varepsilon(x) = f(x) - P(x)$$

l'erreur d'interpolation. Énoncer le théorème qui donne l'erreur d'interpolation en fonction de $f^{(n+1)}$. Parmi les affirmations suivantes, cochez celles qui sont vraies:

- [A] $\forall x \in [0,1], |\varepsilon(x)| \leq \frac{1}{6} x(x-1/2)(1-x)$
- [B] L'erreur ε s'annule en exactement 3 points sur $[0,1]$
- [C] $\forall x \in [0,1], \exists \xi \in [0,1], \varepsilon(x) = \frac{f'''(\xi)}{6} x(x-1/2)(1-x)$
- [D] $\forall x \in [0,1], |\varepsilon(x)| \leq \frac{1}{6} x \left|x-1/2\right| (1-x)$
- [E] $\exists \xi \in [0,1], \forall x \in [0,1], \varepsilon(x) = \frac{f'''(\xi)}{6} x(x-1/2)(1-x)$
- [F] L'erreur ε s'annule en au moins 3 points sur $[0,1]$
- [G] *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

2 Méthode LDL^T

Question 4 ♣ Soient L et D des matrices de la forme

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} \delta_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta_4 \end{bmatrix} \tag{1}$$

Calculer le produit $A = LDL^T$. Parmi les affirmations suivantes, cochez celles qui sont vraies:

- [A] $A_{3,3} = \lambda_2 \delta_2 + \delta_3$
- [B] $A_{3,3} = {\lambda_2}^2 \delta_2 + \delta_3$
- [C] A est symétrique
- [D] $A_{2,3} = \lambda_2 \delta_2$
- [E] $A_{3,2} = \lambda_3 \delta_3$
- [F] *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 5 ♣ Soit A la matrice définie par

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Trouver des matrices L et D telles que $A = LDL^T$. Parmi les affirmations suivantes, cochez celles qui sont vraies:

- [A] $D_{3,3} = 4/3$
- [B] $D_{2,2} = 5/2$
- [C] $L_{3,2} = -2/5$
- [D] $L_{4,3} = -3/4$
- [E] *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 6 ♣ Soit b le vecteur défini par

$$b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Résoudre le système linéaire $Ly = b$. Parmi les affirmations suivantes, cochez celles qui sont vraies:

- [A] $y_2 = 4/5$
- [B] $y_4 = 5/2$
- [C] $y_2 = 3/2$
- [D] $y_4 = 1$
- [E] *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 7 ♣ Résoudre le système linéaire $Ax = b$. Parmi les affirmations suivantes, cochez celles qui sont vraies:

- [A] $y_4 = 3$
- [B] $y_4 = 2$
- [C] $y_3 = 2$
- [D] $y_3 = 3$
- [E] *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

3 Méthode de Gauss

Question 8 ♣ On considère les polynômes suivants: $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$, $P_2(x) = 3x^2 - 1$, $5x^3 - 3x$, ainsi que le produit scalaire défini par

$$< P, Q >= \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt.$$

On note E l'espace vectoriel des polynômes de degré ≤ 3. Parmi les affirmations suivantes, cochez celles qui sont vraies:

- [A] $< P_2, P_1 >= 1/2$
- [B] Les polynômes P_i, $0 \leq i \leq 3$ constituent une base orthogonale de E
- [C] Pour le produit scalaire $<, >$, la norme de P_3 vaut $\sqrt{8/7}$
- [D] Les polynômes P_i, $0 \leq i \leq 3$ constituent une base de E
- [E] Les polynômes P_i, $0 \leq i \leq 3$ constituent une base orthonormale de E
- [F] Pour le produit scalaire $<, >$, la norme de P_3 vaut $8/7$
- [G] *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 9 ♣ Soit la formule d'intégration numérique suivante:

$$\int_{-1}^{1} P(x)dx \simeq \omega_0 P(x_0) + \omega_1 P(x_1)$$

En utilisant la question précédente, déterminer les points d'intégration x_0 et x_1 tels que la méthode soit exacte pour des polynôme de degré ≤ 3. Parmi les affirmations suivantes, cochez celles qui sont vraies:

- A x_0 et x_1 sont les racines de P_2
- B $x_0 = -1$, $x_1 = 1$
- C $x_0 = -1/\sqrt{3}$, $x_1 = 1/\sqrt{3}$
- D x_0 et x_1 sont les racines de P_3
- E $x_0 = -\sqrt{3/5}$, $x_1 = \sqrt{3/5}$
- F *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 10 ♣ Calculer les polynômes de Lagrange L_0 et L_1 associés à la subdivsion (x_0, x_1). Calculer les points d'intégration ω_0 et ω_1 de deux façons différentes: en utilisant la définition ou en utilisant les polynômes de Lagrange. Parmi les affirmations suivantes, cochez celles qui sont vraies:

- A $L_0(x) = (1-x)/2$, $L_1(x) = (x+1)/2$
- B $\omega_0 + \omega_1 = 1$, $\omega_1 - \omega_0 = 0$
- C $\omega_0 = \omega_1 = \int_{-1}^{1} L_0(t)dt$
- D $\omega_0 + \omega_1 = 2$, $\omega_1 - \omega_0 = 0$
- E $L_0(x) = x(x-1)/2$, $L_1(x) = x(1+x)/2$
- F *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 11 Parmi les affirmations suivantes, cochez celle qui vous semble la plus pertinente:

- A $\exists C \in \mathbb{R}, \forall f \in C^3(\mathbb{R},\mathbb{R}), \exists \xi \in [-1,1], \int_{-1}^{1} f(t)dt - \omega_0 f(x_0) - \omega_1 f(x_1) = Cf^{(3)}(\xi)$
- B $\exists C \in \mathbb{R}, \exists \xi \in [-1,1], \forall f \in C^4(\mathbb{R},\mathbb{R}), \int_{-1}^{1} f(t)dt - \omega_0 f(x_0) - \omega_1 f(x_1) = Cf^{(4)}(\xi)$
- C $\exists C \in \mathbb{R}, \forall f \in C^4(\mathbb{R},\mathbb{R}), \exists \xi \in [-1,1], \int_{-1}^{1} f(t)dt - \omega_0 f(x_0) - \omega_1 f(x_1) = Cf^{(4)}(\xi)$

Question 12 ♣ Déterminer la constante C de la question précédente. Parmi les affirmations suivantes, cochez celles qui sont vraies:

- A $C = 1/135$
- B $C = -1/135$
- C $C = 4/135$
- D $C = 8/45$
- E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

4 Équations différentielles

Question 13 ♣ Soit f une fonction $L-$Lipschitzienne de classe $C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et soit x la solution de l'équation différentielle

$$x' = f(x), \quad x(0) = x_0$$

On suppose que l'on dispose d'une méthode numérique d'ordre 1 pour calculer une solution approchée x_n de $x(n\Delta t)$. Cette méthode s'écrit

$$x_{n+1} = \phi(x_n, \Delta t).$$

Calculer la fonction ϕ dans le cas particulier où la méthode est la méthode d'Euler explicite. Parmi les affirmations suivantes, cochez celles qui sont vraies:

- [A] $\phi(x, \Delta t) = x + \Delta t f(x) + \frac{\Delta t^2}{2} f'(x)f(x)$
- [B] $\phi(x, \Delta t) = x - \Delta t f(x)$
- [C] $\phi(x, \Delta t) = x + \Delta t f(x)$
- [D] *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 14 ♣ Calculer un développement limité de $x(t+\Delta t)$ au voisinage de $\Delta t = 0$ à l'ordre 2. Parmi les affirmations suivantes, cochez celles qui sont vraies:

- [A] $x(t+\Delta t) = x(t) + f(x(t))\Delta t + f'(x(t))f(x(t))\Delta t^2/2 + O(\Delta t^3)$
- [B] $x(t+\Delta t) = x(t) + x'(t)\Delta t + x''(t)\Delta t^2/2 + O(\Delta t^3)$
- [C] $x(t+\Delta t) = x(t) + f(x(t))\Delta t + f''(x(t))\Delta t^2/2 + O(\Delta t^3)$
- [D] *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 15 ♣ À partir de maintenant, on considère que ϕ définit une méthode d'ordre 1 quelconque (pas forcément la méthode d'Euler explicite). Pour les développements limités, on supposera de plus que ϕ est une fonction de deux variables de classe C^3. Calculer un développement limité de $\phi(x_0, \Delta t)$ au voisinage de $\Delta t = 0$ à l'ordre 2. Parmi les affirmations suivantes, cochez celles qui sont vraies:

- [A] $\phi(x_0, \Delta t) = x_0 + \Delta t f(x_0) + O(\Delta t^2)$
- [B] $\exists R,\ \phi(x_0, \Delta t) = x_0 + \Delta t f(x_0) + R(x_0)\Delta t^2 + O(\Delta t^3)$
- [C] $\phi(x_0, \Delta t) = x_0 + \Delta t f(x_0) + O(\Delta t^3)$
- [D] $\phi(x_0, \Delta t) = x(\Delta t) + O(\Delta t^2)$
- [E] *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 16 ♣ On souhaite maintenant construire une nouvelle méthode de la forme

$$x_{n+1} = \psi(x_n, \Delta t)$$

à partir de la méthode d'ordre 1. On cherche ψ sous la forme

$$\psi(x, \Delta t) = \phi(\phi(x, \alpha\Delta t), \beta\Delta t).$$

Calculer un développement limité de $\psi(x, \Delta t)$ au voisinage de $\Delta t = 0$ à l'ordre 2. En déduire les équations vérifiées par α et β pour que la nouvelle méthode soit d'ordre 2. Ces équations admettent-elles des solutions? Parmi les affirmations suivantes, cochez celles qui sont vraies:

- [A] $\alpha + \beta = 1$
- [B] On peut déterminer ψ, mais la méthode n'est pas utilisable en pratique
- [C] $\alpha\beta = 1/2$
- [D] Il n'y a pas de solution.
- [E] $\alpha^2 + \beta^2 = 0$
- [F] $\alpha\beta = 1$
- [G] $\psi(x_0, \Delta t) = x(\Delta t) + O(\Delta t^3)$
- [H] $\alpha = (1 + i)/2$, $\beta = (1 - i)/2$ est solution
- [I] *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Feuille de réponses :

Nom et prénom :

. . . .

Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur cette feuille : les réponses données sur les feuilles précédentes ne seront pas prises en compte. Il faut entièrement noircir une case (sans déborder) pour valider une réponse. Il faut aussi gommer avec soin la case, pour annuler un choix. Appliquez-vous, car le scanner est sans pitié !

1 Interpolation

1 : A B C D E

2 : A B C D E F

3 : A B C D E F G

2 Méthode LDL^T

4 : A B C D E F

5 : A B C D E

6 : A B C D E

7 : A B C D E

3 Méthode de Gauss

8 : A B C D E F G

9 : A B C D E F

10 : A B C D E F

11 : A B C

12 : A B C D E

4 Équations différentielles

13 : A B C D

14 : A B C D

15 : A B C D E

16 : A B C D E F G H I