QCM **TEST**

Calcul Scientifique L2
Avril 2017, CC3

Durée : 1 heure 30
Aucun document n'est autorisé. L'usage de la calculatrice est interdit.
Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter zéro, une ou plusieurs bonnes réponses. Les autres ont une unique bonne réponse.
Les réponses erronées peuvent conduire à des points négatifs.

1 Méthode LU

Question 1 ♣ Soit A la matrice définie par

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Calculer la décomposition LU de A. Parmi les affirmations suivantes, cochez celles qui sont vraies:

- [A] $L_{4,1} = 0$
- [B] $U_{3,4} = 0$
- [C] $U_{3,3} = 5/4$
- [D] $L_{4,3} = 4/5$
- [E] $U_{3,4} = 1$
- [F] $L_{4,3} = 3/4$
- [G] $U_{3,3} = 4/3$
- [H] *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 2 ♣ Soit b le vecteur défini par

$$b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Résoudre le système linéaire $Ly = b$. Parmi les affirmations suivantes, cochez celles qui sont vraies:

- [A] $y_4 = 1/2$
- [B] $y_2 = 1/2$
- [C] $y_4 = 1$
- [D] $y_2 = 1$
- [E] *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 3 ♣ Résoudre le système linéaire $Ax = b$. Parmi les affirmations suivantes, cochez celles qui sont vraies:

- A $x_4 = 2/5$
- B $x_3 = 2/3$
- C $x_4 = 1/5$
- D $x_3 = 1/5$
- E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

2 Intégration numérique

Question 4 ♣ Sur l'intervalle $[-1, 1]$, on considère la subdivision $x_0 = -1$, $x_1 = \alpha \in]-1, 1[$. Calculer les polynômes de Lagrange $(L_i)_{i=0...d}$ associés à cette subdivision. Parmi les affirmations suivantes, cochez celles qui sont vraies:

- A $L_1(1) = 1$
- B $d = 1$
- C $L_1(1) = 2/(\alpha + 1)$
- D $d = 2$
- E $L_0(-1) = 1$
- F $L_0(-1) = 0$
- G *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 5 ♣ Soit la formule d'intégration numérique suivante:

$$\int_{-1}^{1} P(x)dx \simeq \omega_0 P(x_0) + \omega_1 P(x_1)$$

En utilisant la question précédente, déterminer les poids d'intégration ω_0 et ω_1 tels que la méthode soit exacte pour des polynôme de degré ≤ 1. Parmi les affirmations suivantes, cochez celles qui sont vraies:

- A Par symétrie, $\omega_0 = \omega_1 = 1$
- B $\omega_0 = 2/(1 + \alpha)$, $\omega_1 = 2\alpha/(1 + \alpha)$
- C $\omega_0 = 2\alpha/(1 + \alpha)$, $\omega_1 = 2/(1 + \alpha)$
- D *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 6 ♣ Calculer maintenant la valeur β de α pour laquelle la méthode est d'ordre au moins 2. Parmi les affirmations suivantes, cochez celles qui sont vraies:

- A $\beta = 1$
- B $\beta = 1/3$
- C Si $\alpha = \beta$, la méthode est d'ordre 3.
- D $\beta = 2/3$
- E Si $\alpha = \beta$, la méthode n'est pas d'ordre 3.
- F *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 7 ♣ On admet qu'il existe un entier p et une constante C tels que pour toute fonction f de classe C^{p+1} il existe $\xi \in [-1, 1]$ tel que

$$\int_{-1}^{1} f(t)dt - \omega_0 f(-1) - \omega_1 f(\beta) = C f^{(p+1)}(\xi)$$

Déterminer p et C. Parmi les affirmations suivantes, cochez celles qui sont vraies:

- A $p = 3$
- B $C = 4/9$
- C $C = -2/405$
- D $C = -2/27$
- E $p = 2$
- F $C = 2/27$
- G *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 8 ♣ Que devient cette formule d'intégration numérique sur un intervalle $[a, b]$ quelconque ? Parmi les affirmations suivantes, cochez celles qui sont vraies:

- A $\int_a^b g(x)dx - (b-a)\left(\frac{1}{4}g(a) + \frac{3}{4}g(\frac{a+2b}{3})\right) = \frac{(b-a)^4}{27} g^{(3)}(\xi)$
- B $\int_a^b g(x)dx - (b-a)\left(\frac{1}{4}g(a) + \frac{3}{4}g(\frac{2a+b}{3})\right) = \frac{(b-a)^3}{27} g^{(3)}(\xi)$
- C $\int_a^b g(x)dx - (b-a)\left(\frac{1}{4}g(a) + \frac{3}{4}g(\frac{a+2b}{3})\right) = \frac{(b-a)^5}{405} g^{(4)}(\xi)$
- D $\int_a^b g(x)dx - (b-a)\left(\frac{1}{4}g(a) + \frac{3}{4}g(\frac{a+2b}{3})\right) = \frac{(b-a)^4}{216} g^{(3)}(\xi)$
- E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

3 Équations différentielles

Question 9 ♣ Soit f une fonction L−Lipschitzienne de classe $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et soit x la solution de l'équation différentielle

$$x' = f(x), \quad x(0) = x_0$$

On suppose que l'on dispose d'une méthode numérique d'ordre 1 pour calculer une solution approchée x_n de $x(n\Delta t)$. Cette méthode s'écrit

$$x_{n+1} = \phi(x_n, \Delta t).$$

Calculer la fonction ϕ dans le cas particulier où la méthode est la méthode d'Euler explicite. Parmi les affirmations suivantes, cochez celles qui sont vraies:

- A $\phi(x, \Delta t) = x + \Delta t f(x)$
- B $\phi(x, \Delta t) = x - \Delta t f(x)$
- C $\phi(x, \Delta t) = x + \Delta t f(x) + \frac{\Delta t^2}{2} f'(x) f(x)$
- D *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 10 ♣ Calculer un développement limité de $x(t+\Delta t)$ au voisinage de $\Delta t = 0$ à l'ordre 2. Parmi les affirmations suivantes, cochez celles qui sont vraies:

- [A] $x(t+\Delta t) = x(t) + x'(t)\Delta t + x''(t)\Delta t^2/2 + O(\Delta t^3)$
- [B] $x(t+\Delta t) = x(t) + f(x(t))\Delta t + f''(x(t))\Delta t^2/2 + O(\Delta t^3)$
- [C] $x(t+\Delta t) = x(t) + f(x(t))\Delta t + f'(x(t))f(x(t))\Delta t^2/2 + O(\Delta t^3)$
- [D] *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 11 ♣ À partir de maintenant, on considère que ϕ définit une méthode d'ordre 1 quelconque (pas forcément la méthode d'Euler explicite). Pour les développements limités, on supposera de plus que ϕ est une fonction de deux variables de classe C^3. Calculer un développement limité de $\phi(x_0, \Delta t)$ au voisinage de $\Delta t = 0$ à l'ordre 2. Parmi les affirmations suivantes, cochez celles qui sont vraies:

- [A] $\phi(x_0, \Delta t) = x_0 + \Delta t f(x_0) + O(\Delta t^3)$
- [B] $\phi(x_0, \Delta t) = x_0 + \Delta t f(x_0) + O(\Delta t^2)$
- [C] $\phi(x_0, \Delta t) = x(\Delta t) + O(\Delta t^2)$
- [D] $\exists R,\ \phi(x_0, \Delta t) = x_0 + \Delta t f(x_0) + R(x_0)\Delta t^2 + O(\Delta t^3)$
- [E] *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 12 ♣ On souhaite maintenant construire une nouvelle méthode de la forme

$$x_{n+1} = \psi(x_n, \Delta t)$$

à partir de la méthode d'ordre 1. On cherche ψ sous la forme

$$\psi(x, \Delta t) = \alpha\phi(x, \Delta t) + \beta\phi(\phi(x, \Delta t/2), \Delta t/2).$$

Calculer un développement limité de $\psi(x, \Delta t)$ au voisinage de $\Delta t = 0$ à l'ordre 2. En déduire les équations vérifiées par α et β pour que la nouvelle méthode soit d'ordre 2. Ces équations admettent-elles des solutions? Parmi les affirmations suivantes, cochez celles qui sont vraies:

- [A] $\alpha = -1 \quad \beta = 2$
- [B] Il n'y a pas de solution.
- [C] On peut déterminer ψ, mais la méthode n'est pas utilisable en pratique
- [D] $\alpha + \beta = 1$
- [E] $\alpha\beta = 1/2$
- [F] $\alpha + \beta = 0$
- [G] $\alpha = \beta = 1/2$
- [H] $\alpha\beta = 1$
- [I] $\alpha = 1/3 \quad \beta = 2/3$
- [J] *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

4 Méthode de Newton

Question 13 ♣ On souhaite calculer α, la racine cubique de 2, avec la méthode de Newton en résolvant numériquement l'équation

$$f(x) = x^3 - 2 = 0.$$

Soit x_0 un réel donné. La méthode de Newton s'écrit $x_{n+1} = g(x_n)$. Déterminer g. Parmi les affirmations suivantes, cochez celles qui sont vraies:

- [A] $g(x) = \frac{x(x^3-3x-2)}{x^3-2}$
- [B] $g(x) = \frac{2}{3}\frac{x^3+1}{x^2}$
- [C] $g(x) = \frac{x^2-2}{x}$
- [D] *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 14 ♣ En fonction du choix de x_0 les itérés x_n de la suite de Newton se comportent différement. Parmi les affirmations suivantes, cochez celles qui sont vraies:

- [A] Il existe $x_0 < 0$ tel que la suite de Newton est définie et converge vers α.
- [B] Si $x_0 > \alpha$ la suite de Newton n'est ni croissante, ni décroissante.
- [C] Si $x_0 > \alpha$ la suite de Newton est décroissante.
- [D] Si $x_0 > \alpha$ la suite de Newton est définie et converge vers α.
- [E] Si $x_0 = 0$ la suite de Newton est définie et converge vers α.
- [F] Si $x_0 < 0$ la suite de Newton est définie et converge vers α.
- [G] *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 15 ♣ On admet que $1,2 < 2^{1/3} < 1,3$. On note

$$m = \min_{x\in[1,2;1,3]} f'(x), \quad M = \max_{x\in[1,2;1,3]} f''(x).$$

On admet aussi que $M/m = 1,805\ldots$
On choisit $x_0 = 1,3$ et on voudrait trouver un entier p tel que

$$0 < x_p - \alpha < \varepsilon = 10^{-10}.$$

Parmi les affirmations suivantes, cochez celles qui sont vraies:

- [A] $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 < x_n - \alpha \leq (1/10)^{2^n}$
- [B] $\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_n > \alpha.$
- [C] Si p est plus grand que $\ln(10)/\ln(2)$ la précision voulue est atteinte
- [D] $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 < x_n - \alpha \leq (x_0 - \alpha)^{2^n}$
- [E] $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 < x_{n+1} - \alpha \leq (x_n - \alpha)^2$
- [F] $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 < x_{n+1} - \alpha \leq \frac{M}{2m}(x_n - \alpha)^2$
- [G] $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 < x_{n+1} - \alpha \leq \frac{M^2}{4m^2}(x_n - \alpha)^2$
- [H] Si p est plus grand que $\ln(\ln(10)/\ln(2))$ la précision voulue est atteinte
- [I] *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Feuille de réponses :

Nom et prénom :

. . . .

Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur cette feuille : les réponses données sur les feuilles précédentes ne seront pas prises en compte. Il faut entièrement noircir une case (sans déborder) pour valider une réponse. Il faut aussi gommer avec soin la case, pour annuler un choix. Appliquez-vous, car le scanner est sans pitié !

1 Méthode *LU*

1 : A B C D E F G H

2 : A B C D E

3 : A B C D E

2 Intégration numérique

4 : A B C D E F G

5 : A B C D

6 : A B C D E F

7 : A B C D E F G

8 : A B C D E

3 Équations différentielles

9 : A B C D

10 : A B C D

11 : A B C D E

12 : A B C D E F G H I J

4 Méthode de Newton

13 : A B C D

14 : A B C D E F G

15 : A B C D E F G H I