

QCM

TEST

Calcul Scientifique L2
Avril 2017, CC3

Durée : 1 heure

Aucun document n'est autorisé. L'usage de la calculatrice est interdit.

Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter zéro, une ou plusieurs bonnes réponses. Les autres ont une unique bonne réponse.

Les réponses erronées peuvent conduire à des points négatifs.

1 Interpolation

Question 1 ♣ On considère la subdivision suivante de l'intervalle $[-1, 1]$:

$$x_0 = -1, x_1 = 0, x_2 = 1.$$

Calculer les polynômes de Lagrange $(L_i)_{0 \leq i \leq 2}$ associés à cette subdivision, puis parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies:

- ☒ Pour $0 \leq i \leq 2$, $L_i(x_i) = 1$
- ☐ Ces trois polynômes sont ≥ 0 sur l'intervalle $[-1, 1]$
- ☐ $L_1(1/2) = -3/4$
- ☐ $L_0(1/2) = 1/8$
- ☒ $L_0(1/4) + L_1(1/4) + L_2(1/4) = 1$
- ☒ $L_0(0) = L_2(0) = 0$
- ☒ $L_2(x) = L_0(-x)$.
- ☐ Aucune de ces réponses n'est correcte.

Question 2 ♣ Calculer le polynôme d'interpolation P de degré ≤ 2 tel que

$$P(-1) = 0, P(0) = 1, P(1) = 1$$

. Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies:

- ☒ $P(-1/2) = 5/8$
- ☒ $P(1/2) = 9/8$
- ☐ $P(1/2) = 5/8$
- ☐ $P(-1/2) = 9/8$
- ☐ Aucune de ces réponses n'est correcte.

Question 3 ♣ On considère maintenant les polynômes suivants

$$Q_0(x) = 1, \quad Q_1(x) = x + 1, \quad Q_2(x) = (x + 1)x.$$

On cherche à écrire P sous la forme

$$P = \alpha Q_0 + \beta Q_1 + \gamma Q_2.$$

Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies:

☐ $\gamma = -1/2$

☐ $\alpha = 1/2$

☐ Le vecteur $(\alpha, \beta, \gamma)^T$ est solution d'un système linéaire triangulaire.

☐ Il n'y a pas de solution car les Q_i ne forment pas une base de l'espace vectoriel des polynômes de degré ≤ 2 .

☐ $\alpha + \beta + \gamma = 1$

☐ Aucune de ces réponses n'est correcte.

2 Méthode LU

Question 4 ♣ Soit L une matrice de la forme

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ l_1 & l_2 & l_3 & 1 \end{bmatrix}$$

et U une matrice de la forme

$$U = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 & u_1 \\ 0 & d_2 & 0 & u_2 \\ 0 & 0 & d_3 & u_3 \\ 0 & 0 & 0 & d_4 \end{bmatrix}$$

Calculer le produit $A = LU$. Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies:

☐ $A_{3,4} = l_3 d_3$

☐ $A_{2,2} = d_2$

☐ $A_{4,4} = l_1 u_1 + l_2 u_2 + l_3 u_3$

☐ $A_{3,4} = u_3$

☐ $A_{4,4} = l_1 u_1 + l_2 u_2 + l_3 u_3 + d_4$

☐ $A_{3,1} = 0$

☐ $A_{4,1} = l_1 d_4$

☐ Aucune de ces réponses n'est correcte.

Question 5 ♣ Soit maintenant A une matrice de la forme

$$A = \begin{bmatrix} \delta_1 & 0 & 0 & \mu_1 \\ 0 & \delta_2 & 0 & \mu_2 \\ 0 & 0 & \delta_3 & \mu_3 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \delta_4 \end{bmatrix}$$

Calculer la décomposition LU de A . Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies:

- ☐ A $L_{3,3} = \delta_3$
☒ B $U_{2,4} = \mu_2$
☐ C $U_{3,4} = \lambda_3$
☒ D $L_{4,3} = \lambda_3/\delta_3$
☒ E $U_{4,4} = \delta_4 - \sum_{i=1}^3 \lambda_i \mu_i / \delta_i$
☐ F $U_{4,4} = \delta_4 - \sum_{i=1}^3 \lambda_i / \delta_i$
☐ G Pour que la décomposition existe, il faut que $\delta_1 \delta_2 \delta_3 \delta_4 \neq 0$.
☒ H Pour que la décomposition existe, il faut que $\delta_1 \delta_2 \delta_3 \neq 0$.
☐ I $U_{4,4} = \delta_4 + \sum_{i=1}^3 \lambda_i \mu_i / \delta_i$
☐ J Aucune de ces réponses n'est correcte.

3 Intégration numérique

Question 6 ♣ Soit α un réel tel que $0 < \alpha < 1$. On considère la subdivision $x_0 = -\alpha$, $x_1 = \alpha$ sur $[-1, 1]$. Calculer les polynômes de Lagrange $(L_i)_{i=0\dots d}$ associés à cette subdivision. Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies:

- ☐ A $L_1(1) = 1$
☐ B $d = 2$
☒ C $d = 1$
☒ D $L_0(-\alpha) = 1$
☐ E $L_0(-1) = 1$
☒ F $L_1(1) = 1/2 + 1/2 \alpha^{-1}$
☐ G Aucune de ces réponses n'est correcte.

Question 7 ♣ Soit la formule d'intégration numérique suivante:

$$\int_{-1}^1 P(x) dx \simeq \omega_0 P(x_0) + \omega_1 P(x_1)$$

Déterminer les poids d'intégration ω_0 et ω_1 tels que la méthode soit exacte pour des polynômes de degré ≤ 1 . Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies:

- ☒ A $\omega_0 + \omega_1 = 2$.
☐ B La formule est alors exacte pour tous les polynômes de degré impair.
☐ C La formule est alors exacte pour tous les polynômes pairs.
☐ D $\omega_0 + \omega_1 = 1$
☒ E La formule est alors exacte pour tous les polynômes impairs.
☒ F Par symétrie, $\omega_0 = \omega_1$
☐ G Aucune de ces réponses n'est correcte.

Question 8 ♣ Calculer maintenant la valeur β de α pour laquelle la méthode est d'ordre au moins 2. Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies:

☐ $\beta = 1/\sqrt{3}$

☐ $\beta = 1/\sqrt{5}$

☐ Si $\alpha = \beta$, la méthode est d'ordre 3.

☐ $\beta = \sqrt{3}/3$

☐ Si $\alpha = \beta$, la méthode est d'ordre 4.

☐ Aucune de ces réponses n'est correcte.

Question 9 ♣ On admet qu'il existe un entier p et une constante C tels que pour toute fonction f de classe C^{p+1} il existe $\xi \in [-1, 1]$ tel que

$$\int_{-1}^1 f(t)dt - \omega_0 f(-\alpha) - \omega_1 f(\alpha) = C f^{(p+1)}(\xi)$$

Déterminer p et C . Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies:

☐ $C = 1/135$

☐ $C = 8/45$

☐ $p = 3$

☐ $C = -8/45$

☐ $C = 2/27$

☐ $C = 4/135$

☐ $p = 2$

☐ $p = 4$

☐ Aucune de ces réponses n'est correcte.

Question 10 ♣ Que devient cette formule d'intégration numérique sur un intervalle $[a, b]$ quelconque ? Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies:

☐ $\exists \xi \in [a, b], \quad \int_a^b g(x)dx - \frac{b-a}{2} \left(g\left(\frac{a+b}{2} - \frac{b-a}{2}\alpha\right) + g\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\alpha\right) \right) = \frac{(b-a)^5}{432} g^{(5)}(\xi).$

☐ $\exists \xi \in [a, b], \quad \int_a^b g(x)dx - \frac{b-a}{2} \left(g\left(\frac{a+b}{2} - \frac{b-a}{2}\alpha\right) + g\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\alpha\right) \right) = \frac{(b-a)^5}{4320} g^{(4)}(\xi).$

☐ $\exists \xi \in [a, b], \quad \int_a^b g(x)dx - \frac{b-a}{2} \left(g\left(\frac{a+b}{2} - \frac{b-a}{2}\alpha\right) + g\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\alpha\right) \right) = \frac{(b-a)^5}{2160} g^{(4)}(\xi).$

☐ $\exists \xi \in [a, b], \quad \int_a^b g(x)dx - \frac{b-a}{2} \left(g\left(\frac{a+b}{2} - \frac{b-a}{2}\alpha\right) + g\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\alpha\right) \right) = \frac{(b-a)^4}{2160} g^{(4)}(\xi).$

☐ Aucune de ces réponses n'est correcte.

4 Équations différentielles

Question 11 ♣ On souhaite résoudre numériquement l'équation différentielle

$$x' = Ax, \quad x(0) = x_0,$$

où A est une matrice réelle $n \times n$ (et donc $x(t)$ est un vecteur de $\mathbb{R}^n$). L'approximation de $x(i\Delta t)$ est notée x_i . Soit p un entier ≥ 0 . Calculer $x^{(p)}(0)$. Puis cocher les affirmations vraies:

☐ A $x^{(p)}(0) = \frac{1}{p!} A^p x_0$.

☐ $x^{(p)}(0) = A^p x_0$.

☐ $x^{(p+1)} = A^p x$

☐ D $x^{(p+1)} = p A^p x$

☐ E Aucune de ces réponses n'est correcte.

Question 12 ♣ On approche l'équation différentielle par la méthode d'Euler explicite

$$x_{i+1} = x_i + \Delta t A x_i.$$

Cocher les affirmations vraies:

☐ A Dans ce cas particulier, la méthode d'Euler explicite est d'ordre 2.

☐ La méthode d'Euler explicite est d'ordre 1.

☐ $x_1 = x_0 + O(\Delta t)$.

☐ $x_1 = x(0) + x'(0)\Delta t + O(\Delta t^2)$.

☐ E Aucune de ces réponses n'est correcte.

Question 13 ♣ On approche maintenant l'équation différentielle par la méthode de Crank-Nicolson, qui s'écrit

$$x_{i+1} = \left(I - \frac{\Delta t}{2} A\right)^{-1} \left(I + \frac{\Delta t}{2} A\right) x_i.$$

Cocher les affirmations vraies (indication: faire un DL quand $\Delta t \rightarrow 0$):

☐ A $x_1 = x_0 + \frac{\Delta t}{2} A x_0 + \frac{\Delta t^2}{4} A^2 x_0 + O(\Delta t^3)$.

☐ $x_1 = x(\Delta t) + O(\Delta t^3)$.

☐ La méthode de Crank-Nicolson est d'ordre 2.

☐ $\left(I - \frac{\Delta t}{2} A\right)^{-1} = I + \frac{\Delta t}{2} A + \frac{\Delta t^2}{4} A^2 + O(\Delta t^3)$

☐ E La méthode de Crank-Nicolson est d'ordre 3.

☐ $x_1 = x_0 + \Delta t A x_0 + \frac{\Delta t^2}{2} A^2 x_0 + O(\Delta t^3)$.

☐ G Aucune de ces réponses n'est correcte.

5 Méthode du point fixe

Question 14 ♣ On considère, sur l'intervalle $[0,1]$, la fonction f définie par

$$f(x) = 1 - x - x^3.$$

Cocher les affirmations vraies:

- ☐ A f admet deux racines distinctes dans $]0,1[$. On note α la plus petite des deux.
- ☐ B f est strictement croissante sur $[0,1]$.
- ☒ C $f(0) \cdot f(1) < 0$.
- ☐ D $\forall x \in [0,1], \quad 0 \leq f(x) \leq 1$
- ☒ E f admet une unique racine α dans $]0,1[$
- ☐ F *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 15 ♣ On souhaite calculer α avec la méthode du point fixe suivante:

$$x_{n+1} = g(x_n) = x_n + f(x_n).$$

Cocher les affirmations vraies (on admettra que $\alpha \in]0.6; 0.7[$):

- ☒ A g' est décroissante sur $[0,1]$.
- ☐ B g est contractante sur $[0,1]$
- ☒ C $g'(\alpha) < -1$
- ☐ D $g([0,1]) \subset]0,1[$
- ☒ E α est l'unique point fixe de g sur $[0,1]$.
- ☐ F Pour toute initialisation $x_0 \in [0,1]$ la suite (x_n) converge vers α
- ☒ G Pour toute initialisation $x_0 \in [0,1]$ la suite (x_n) a deux valeurs d'adhérence: 0 et 1
- ☒ H $g([0,1]) \subset [0,1]$
- ☐ I *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Feuille de réponses :

Nom et prénom :

.....

Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur cette feuille : les réponses données sur les feuilles précédentes ne seront pas prises en compte. Il faut entièrement noircir une case (sans déborder) pour valider une réponse. Il faut aussi gommer avec soin la case, pour annuler un choix. Appliquez-vous, car le scanner est sans pitié !

1 Interpolation

1 : ☐ ☐ B ☐ C ☐ D ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ H2 : ☐ ☐ ☐ C ☐ D ☐ E3 : ☐ ☐ B ☐ ☐ D ☐ E ☐ F

2 Méthode LU

4 : ☐ A ☐ ☐ ☐ C ☐ ☐ ☐ ☐ G ☐ H5 : ☐ A ☐ ☐ ☐ C ☐ ☐ ☐ F ☐ G ☐ ☐ I ☐ J

3 Intégration numérique

6 : ☐ A ☐ B ☐ ☐ ☐ E ☐ ☐ G7 : ☐ ☐ B ☐ C ☐ D ☐ ☐ ☐ G8 : ☐ ☐ B ☐ ☐ ☐ E ☐ F9 : ☐ ☐ B ☐ ☐ D ☐ E ☐ F ☐ G ☐ H ☐ I10 : ☐ A ☐ ☐ ☐ C ☐ D ☐ E

4 Équations différentielles

11 : ☐ A ☐ ☐ ☐ D ☐ E12 : ☐ A ☐ ☐ ☐ ☐ E13 : ☐ A ☐ ☐ ☐ ☐ E ☐ ☐ G

5 Méthode du point fixe

14 : ☐ A ☐ B ☐ ☐ D ☐ ☐ F15 : ☐ ☐ B ☐ ☐ D ☐ ☐ F ☐ ☐ ☐ I

CORRECTION