Calcul scientifique

Équations différentielles

Pour résoudre l'équation différentielle

$$x'(t) = f(x(t)),$$

on considère le schéma

$$\begin{array}{rcl} x_* & = & x_i + \alpha \Delta t f(x_i), \\ x_{i+1} & = & x_i + \Delta t f(x_*). \end{array}$$

Pour quelle valeur de α ce schéma est-il d'ordre 2 ?

Méthode de Newton

Soit la fonction $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 4x^3 + y \\ 4y^3 + x - 1 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer la matrice jacobienne de F.
2. On souhaite résoudre

   $$F \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

   par la méthode de Newton

   $$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = G \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}.$$

   Expliciter la fonction G.
3. Écrire un programme Fortran pour résoudre numériquement (1).
4. Comment trouver le minimum de la fonction $h(x, y) = (x^4 + y^4 + y(x - 1))$?

Différences finies

Soit c une constante > 0 et u_0 une fonction de x donnée.

1. Proposer un schéma numérique explicite pour trouver $u(x, t)$ solution de

   $$\begin{array}{rcl} u_t - cu_x & = & 0, \quad x \in [0, L], \quad t \in [0, T], \\ u(0, t) & = & u(L, t), \\ u(x, 0) & = & u_0(x). \end{array} \tag{2}$$

   On utilisera l'approximation

   $$u_x(x, t) \simeq \frac{u(x, t) - u(x - \Delta x, t)}{\Delta x}.$$

2. Écrire un programme Fortran pour résoudre numériquement (2).
3. Trouver les solutions de (2) qui sont de la forme $u(x, t) = \cos(\alpha x + \beta t)$.
4. Comment vérifier que votre programme est juste ?
5. Trouver expérimentalement la condition de stabilité du schéma.