

Calcul scientifique : révisions

Équations différentielles

1. Pour résoudre l'équation différentielle

$$x'(t) = f(x(t)),$$

on considère le schéma

$$\begin{aligned}x_* &= x_i + \alpha \Delta t f(x_i), \\x_{**} &= x_i + \beta \Delta t f(x_*), \\x_{i+1} &= \gamma x_* + (1 - \gamma)x_{**}.\end{aligned}$$

Calculer α, β, γ pour que le schéma soit d'ordre 2.

2. Soit y une fonction de classe $C^\infty(\mathbb{R})$. Trouver les coefficients $\alpha_i, i \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ tels que la formule

$$y'(t) \simeq \sum_{i=-2}^2 \alpha_i y(t + i\Delta t)$$

soit la plus précise possible.

Différences finies, systèmes linéaires

1. Écrire un schéma de différences finies explicite à deux pas pour résoudre l'équation d'évolution

$$\begin{aligned}u_{tt} - u_{xx} &= 0, & x \in [-\pi, \pi], & t \in [0, T], \\u_x(-\pi, 0) = u_x(\pi, 0) &= 0, \\u(x, 0) &= u_0(x), \\u_t(x, 0) &= v_0(x).\end{aligned}$$

2. Donner une version implicite de ce schéma. Expliciter le système linéaire à résoudre à chaque itération.
3. Programmer et tester le schéma explicite. Pour vérifier la programmation, chercher une solution exacte sous la forme $u(x, t) = g(t) \cos(kx)$.
4. Quelle est la condition de stabilité?

Point fixe

1. Montrer que l'équation $f(x) = x^3 - 2$ possède une solution unique α et qu'on peut obtenir celle-ci à partir de la méthode de la dichotomie sur l'intervalle $[1, 2]$. Combien faut-il d'itérations pour atteindre une précision de $\varepsilon = 10^{-10}$?
2. Même question pour la méthode de Newton avec l'initialisation $x_0 = 1$.

Intégration numérique

On cherche une méthode d'intégration numérique de la forme

$$\int_0^1 f(t) \simeq \alpha f(0) + \beta f(\gamma),$$

où γ est un point de l'intervalle $[0, 1]$.

1. On suppose γ donné. Déterminer α et β pour que la méthode soit exacte pour des polynômes de degré ≤ 1
2. Comment choisir γ pour que la formule soit exacte pour des polynômes de degré ≤ 2 ?
3. Que devient la formule sur un intervalle $[a, b]$ quelconque? (faire le changement de variables $x = (b - a)t + a$)
4. Formule d'erreur? Méthode composite associée?