

Calcul scientifique : révisions

Équations différentielles

1. Pour résoudre l'équation différentielle

$$x'(t) = f(x(t)),$$

on considère le schéma

$$\begin{aligned}x_* &= x_i + \Delta t f(x_i), \\x_{i+1} &= x_i + \frac{\Delta t}{2} (f(x_i) + f(x_*)).\end{aligned}$$

Montrer que ce schéma est d'ordre 2.

2. Pour résoudre l'équation différentielle

$$x'(t) = f(x(t)),$$

on considère le schéma

$$x_{i+1} = x_{i-1} + 2\Delta t f(x_i).$$

- (a) Montrer que ce schéma est d'ordre 2.
- (b) Comment initialiser le calcul ?
- (c) écrire le programme fortran correspondant.

Méthode de Newton

1. Écrire un sous-programme qui résout l'équation $f(x) = 0$ par la méthode de Newton. Un sous-programme qui calcule $f(x)$ et $f'(x)$ est donné. On commentera avec précision les rôles des variables d'entrée et de sortie du sous-programme.
2. Soit l'équation du second degré

$$X^2 - SX + P = 0. \tag{1}$$

On suppose que cette équation possède deux racines complexes distinctes z_1 et z_2 .

Soit $F : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$,

$$F(x_1, x_2) = (x_1 + x_2 - S, x_1 x_2 - P).$$

- (a) Montrer que résoudre (1) est équivalent à résoudre

$$F(x_1, x_2) = 0. \tag{2}$$

- (b) Calculer la matrice jacobienne de F . Décrire la méthode de Newton pour résoudre (2).
- (c) Écrire et tester un programme pour résoudre (2) par la méthode de Newton.

Point fixe

1. Montrer que l'équation $f(x) = \exp(-x/2) = x$ possède une solution unique α et qu'on peut obtenir celle-ci à partir de la méthode du point fixe sur $[0, 1]$. Combien faut-il d'itérations pour atteindre une précision de $\varepsilon = 10^{-10}$?
2. Même question pour la méthode de Newton avec l'initialisation $x_0 = 1$.
3. Même question pour la méthode de la dichotomie.

Intégration numérique

On cherche une méthode d'intégration numérique de la forme

$$\int_0^3 f(t) dt \simeq \alpha f(0) + \beta f(1) + \gamma f(2),$$

1. Déterminer α , β et γ pour que la méthode soit exacte pour des polynômes de degré ≤ 2
2. En déduire une méthode de résolution de l'équation différentielle $x' = f(x)$. (Indication : $x(t) - x(0) = \int_0^t f(x(s)) ds$.)
3. Quel est l'ordre de cette méthode ?

Factorisation LU

Soit A une matrice inversible symétrique définie positive et tridiagonale. En s'inspirant de la méthode LU écrire un programme qui calcule une décomposition de A sous la forme

$$A = L^T L$$

où L est une matrice triangulaire inférieure et tridiagonale.

Différences finies

Soit ε une constante réelle > 0 . Écrire un programme qui résout par la méthode des différences finies l'équation

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} - \varepsilon u_x &= f, & x \in [0, L], & \quad t \in [0, T], \\ u(0, t) = u(L, t) &= 0. \end{aligned}$$

Comment procédez-vous pour vérifier que votre programme est correct ?