

Fortran TP2

Méthode d'Euler améliorée

Écrire un programme qui résout l'équation différentielle

$$\frac{dx(t)}{dt} = x(t), \quad x(0) = 1,$$

par la méthode d'Euler améliorée avec un pas de temps $\Delta t = 1/N$, $N \in \mathbb{N}$

$$\frac{x_i - x_{i-1}}{\Delta t} = x_{i-1}, \quad x_0 = x(0), \quad i = 1 \dots N.$$

On note x_N la solution numérique obtenue à l'étape N . Vérifier numériquement que $x_N = \exp(1) + O(\Delta t^2)$.

Lotka-Volterra

On considère le modèle proie-prédateur suivant http://fr.wikipedia.org/wiki/%C3%89quations_de_Lotka-Volterra

$$\begin{aligned} x' &= ax - bxy, \\ y' &= -cy + dxy, \end{aligned}$$

où $x(t)$ est le nombre de proies et $y(t)$ le nombre de prédateurs à l'instant t (exprimé en jours). Les constantes du modèle a, b, c, d sont toutes > 0 .

1. Calculer les constantes a, b, c, d de façon que (i) $(x, y) = (100, 10)$ soit un point d'équilibre du système, (ii) la population x double tous les 90 jours si $y = 0$, (iii) la population y est diminuée de 90% tous les 30 jours si $x = 0$.
2. Calculer l'équation des courbes solutions dans le plan (x, y) . Donner graphiquement l'allure de ces courbes (portrait de phase).
3. Tracer quelques courbes du portrait de phase au moyen d'un programme fortran utilisant la méthode d'Euler explicite. Conclusion.
4. Programmer la méthode d'Euler améliorée. Vérifier qu'elle est plus précise. Tracer le portrait de phase complet.
5. On modifie l'équation des proies pour prendre en compte la quantité limitée de nourriture qu'elles peuvent se partager

$$x' = ax - bxy - \varepsilon x^2.$$

Calculer ε pour que la population stable maximale de proie soit égale à $x = 1000$ lorsque $y = 0$.

6. Tracer numériquement le portrait de phase du modèle amélioré. Conclusion.