

Fortran TP3

Factorisation LU d'une matrice tridiagonale

Écrire un programme qui calcule la factorisation LU d'une matrice tridiagonale A et qui résout le système linéaire associé. Tester la validité du programme en comparant le résultat numérique et un résultat exact, obtenu par exemple avec Maple.

Déformation d'une membrane

La déformation $y(x)$ d'une membrane de longueur L sous l'effet d'une pression $p > 0$ est solution de l'équation différentielle

$$\begin{aligned} -(e(x)y'(x))' &= p/\mu, \\ y(0) = y(L) &= 0. \end{aligned} \tag{1}$$

La quantité $e(x)$ est l'épaisseur de la membrane au point x . La constante $\mu > 0$ dépend du matériau dont est fait la membrane.

1. Calculer la solution exacte de cette équation lorsque e est une fonction constante.
2. Proposer une discrétisation par différence finies de (1). On choisira un pas d'espace $\Delta x = L/(N+1)$ et une approximation y_i de la déformation $y(x_i)$ aux points $x_i = i\Delta x$, $i = 1 \cdots N$.
3. Réaliser un programme qui calcule le vecteur $Y = (y_1 \cdots y_N)^T$ (utiliser le programme ci-dessus de résolution d'un système tridiagonal).
4. Vérifier la validité du programme grâce à la solution exacte calculée en 1. Montrer que dans ce cas, la méthode des différences finies est exacte.
5. Vérifier aussi que le programme donne le bon résultat lorsque la résistance $e(x)$ est variable. Quelle est l'ordre de la méthode?
6. On fixe $\int_0^L e(x)dx = Le_0$. Comment faut-il répartir la matière pour que la déformation centrale soit minimale?