

Fortran TP4

Dichotomie

Soit l'équation

$$2 - x = \exp(x). \quad (1)$$

1. Montrer que cette équation admet une unique solution dans $[0, 1]$.
2. Calculer un majorant $n_{\max}$ du nombre d'itérations de la méthode de dichotomie qui assure une précision de $\varepsilon = 10^{-10}$.
3. Écrire un programme qui calcule cette solution par la méthode de dichotomie avec une précision $\varepsilon = 10^{-10}$. Combien d'itérations n sont-elles nécessaires ? Vérifier que $n \leq n_{\max}$!

Point fixe

On souhaite maintenant résoudre l'équation (1) par la méthode du point fixe.

1. Soit $\lambda \neq 0$ et

$$g_\lambda(x) = \lambda((2 - x) \exp(-x) - 1) + x.$$

Montrer que la solution de (1) est aussi un point fixe de g_λ .

2. On choisit $\lambda = 1/4$. Montrer que g_λ est une application contractante de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$. Que vaut la constante de contraction ?
3. Calculer un majorant $n_{\max}$ du nombre d'itérations de la méthode du point fixe qui assure une précision de $\varepsilon = 10^{-10}$.
4. Écrire un programme qui calcule la solution de (1) par la méthode du point fixe avec une précision $\varepsilon = 10^{-10}$ en partant de $x_0 = 0$. Combien d'itérations n sont-elles nécessaires ? Vérifier que $n \leq n_{\max}$.

Newton

Écrire un programme qui calcule la solution de (1) par la méthode de Newton avec une précision $\varepsilon = 10^{-10}$ en partant de $x_0 = 0$. Combien d'itérations n sont-elles nécessaires ?

Newton en dimension > 1

Le but de cet exercice est de construire une méthode pour trouver les racines d'un polynôme de la forme

$$P(x) = a_N + a_{N-1}x + \cdots + a_1x^{N-1} + x^N.$$

(Aller directement à la question 7 pour le TP, le reste des questions est facultatif pour ceux qui veulent une justification de la méthode). On suppose que P a N racines réelles distinctes notées $X = (x_1 \cdots x_N)$. Pour $k = 1 \cdots N$, on note $\Sigma_k(x_1, \cdots x_N)$ la somme de tous les produits de k racines différentes. Par exemple $\Sigma_N = x_1 x_2 \cdots x_N$ et $\Sigma_1 = x_1 + x_2 + \cdots x_N$.

1. Combien y a-t-il de termes dans la somme Σ_k ? Montrer que $\forall k = 1 \cdots N$,

$$\Sigma_k(x_1, \cdots x_N) = (-1)^k a_k.$$

2. Trouver les racines de P est donc équivalent à trouver les zéros de la fonction $F : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ définie par

$$F_k(x_1, x_2, \cdots x_N) = (-1)^k \Sigma_k(x_1, \cdots x_N) - a_k.$$

Rappeler le principe de la méthode de Newton pour résoudre

$$F(X) = 0. \quad (2)$$

3. Montrer que

$$\sum_{k=1}^N (-1)^k \frac{\partial}{\partial x_i} \Sigma_k(X) x^{N-k} = - \prod_{1 \leq k \leq N, k \neq i} (x - x_i)$$

4. On note Δ la matrice diagonale $N \times N$ définie par

$$\Delta_{ii} = \prod_{k \neq i} (x_k - x_i)$$

et V la matrice de Vandermonde $N \times N$

$$V_{ij} = x_i^{N-j}.$$

Montrer que

$${}^t F'(X) {}^t V = -\Delta.$$

5. En déduire que

$$F'(X)^{-1} = -\Delta^{-1} V.$$

6. Montrer que la méthode de Newton appliquée à (2) consiste à choisir des valeurs initiales distinctes $(x_1^{(0)}, \dots, x_N^{(0)})$ puis à construire les suites $x_i^{(n)}$ définies par

$$x_i^{(n+1)} = x_i^{(n)} - \frac{P(x_i^{(n)})}{\prod_{k \neq i} (x_i^{(n)} - x_k^{(n)})}.$$

7. Tester votre méthode numériquement sur divers polynômes, y compris des polynômes avec des racines complexes.