Fortran TP6

Gauss-Legendre

On note $J_N(f)$ l'approximation par une méthode d'intégration composite de $I(f) = \int_0^1 f(t)dt$ sur N intervalles.

1. Écrire un programme qui réalise ce calcul. Décrire la programmation.
2. Tester la précision de la méthode pour la méthode des rectangles et de Simpson. On prendra $f(x) = \exp(x)$. Vérifier numériquement l'ordre de la méthode en traçant le logarithme de l'erreur en fonction du logarithme de N.
3. Même question pour la méthode de Gauss-Legendre à 2 ou 3 points.
4. Que se passe-t-il lorsqu'on choisit $f(t) = \ln(t)$?

Intégration en dimension 2

On souhaite calculer $I(f) = \int\int_{(x,y)\in\Omega} f(x,y)dxdy$ où Ω est le domaine suivant

$$\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \varepsilon < x^2 + y^2 < 2\right\}, \quad \varepsilon > 0.$$

1. On note $\hat{\Omega} =]0,1[\times]0,1[$. Trouver un difféomorphisme φ qui transforme $\hat{\Omega}$ en Ω. Rappeler la formule de changement de variables dans une intégrale double qui permet de transformer l'intégrale sur Ω en une intégrale sur $\hat{\Omega}$.
2. Décrire rapidement (une demi-page maximum) la méthode composite $J_N(f)$ pour calculer numériquement $I(f)$. Ici, N désigne le nombre de subdivisions dans chaque direction sur le carré $\hat{\Omega}$.
3. Application : $f(x,y) = x^2 \frac{\ln\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}{x^2+y^2}$, $\varepsilon = 1$. Calculer la valeur exacte de $I(f)$. Calculer numériquement l'ordre de convergence pour la méthode des trapèzes et la méthode de Gauss-Legendre à trois points.
4. Même question pour $\varepsilon = 0$. Conclusion ?