

Fortran TP7

Équation de diffusion : méthode de la série

On considère le problème d'évolution

$$\begin{aligned}u_t - u_{xx} &= 0, \quad t \in [0, T], \quad x \in [-\pi, \pi], \\u(x, 0) &= u_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } -\pi/2 \leq x \leq \pi/2, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}, \\u(-\pi, t) = u(\pi, t) &= 0.\end{aligned}$$

1. Rappeler comment on calcule $u(x, t)$ au moyen d'un développement en série de fonctions.
2. Écrire un programme pour calculer le développement en série tronqué à P termes sur un maillage en espace avec N points.
3. Tester le programme pour plusieurs valeurs des paramètres de discrétisation P et N et pour les instants $T = 0, 01$; $T = 0, 1$; $T = 0, 5$; $T = 1$; $T = 10$.

Équation de diffusion : schéma explicite

On considère le même problème d'évolution qu'à l'exercice précédent.

1. Programmer le schéma aux différences finies explicite avec N points pour calculer la solution de l'équation de diffusion. Le pas d'espace est noté $\Delta x = 2\pi/N + 1$, le pas de temps est noté Δt .
2. Comparer les solutions données par votre programme avec les résultats de l'exercice précédent.
3. Vérifier que le schéma est instable si $\Delta t > \Delta x/2$.
4. Pouvez-vous prouver ce résultats de stabilité ?

Équation de diffusion : schéma implicite

On considère le même problème d'évolution qu'à l'exercice précédent. Le schéma explicite peut s'écrire sous la forme

$$U^{n+1} = \left(I - \frac{\Delta t}{\Delta x^2} A \right) U^n$$

avec

$$U^n = (u_1^n \cdots u_N^n)^T, \quad u_i^n \simeq u(x_i, t_n), \quad x_i = -\pi + (i-1)\Delta x, \quad t_n = n\Delta t.$$

1. Expliciter la matrice A .
2. Pour résoudre l'équation de diffusion, on considère le " θ -schéma"

$$\frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t} + \frac{A}{\Delta x^2} [(1-\theta)U^n + \theta U^{n+1}] = 0.$$

Vérifier que si $\theta = 0$, on retrouve le schéma explicite. Vérifier que si $\theta = 1/2$, ce schéma est d'ordre 2 en espace et en temps.

3. Programmer ce schéma et étudier sa précision et sa stabilité.