Équation des ondes périodiques

On considère la solution $u(x,t)$ de l'équation des ondes

$$\begin{aligned} u_{tt} - u_{xx} &= 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \in [0,T], \\ u(x,0) &= u_0(x), \\ u_t(x,0) &= v_0(x). \end{aligned} \tag{1}$$

Les fonctions u_0 et v_0 sont assez régulières et $2\pi-$**périodiques** sur $\mathbb{R}$. Il suffit donc de les définir sur l'intervalle $[-\pi,\pi]$. Pour les applications numériques, on considérera, pour $x \in [-\pi,\pi]$,

$$u_0(x) = \begin{cases} (1+x)(1-x) \text{ si } |x| \leq 1, \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases} \tag{2}$$

et

$$v_0(x) = -u_0'(x). \tag{3}$$

Calculer, pour cette condition initiale, la solution u de l'équation des ondes. Montrer que cette solution est $2\pi-$périodique par rapport à x.

I) Différences finies

1. Programmer le schéma saute-mouton pour calculer la solution de l'équation (1) pour la condition initiale (2), (3). Vous décrirez la programmation et en particulier comment vous prenez en compte le caractère périodique de la solution.
2. Comparer à l'instant $T = 3$ la solution exacte, calculée en préambule, avec la solution numérique pour $N = 20$, 100, 500 points. Qu'observe-t-on ?
3. Déterminer numériquement le pas de temps pour lequel le schéma devient instable.

II) Série

On souhaite calculer la solution de (1) par une méthode de développement en série. On considère des solutions complexes $u(x,t) \in \mathbb{C}$ de (1) (car cela rend les calculs plus faciles).

1. Montrer que pour tout entier $k \in \mathbb{Z}$ la fonction
$$u_k(x,t) = e^{ikx}e^{-ikt}$$
est une solution $2\pi-$périodique en x de l'équation des ondes.
2. Soit le produit scalaire complexe
$$< f, g >= \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}dx.$$
Montrer que la famille de fonctions $x \to e^{ikx}$, $k \in \mathbb{Z}$, constitue une famille de fonctions orthogonales pour ce produit scalaire.
3. On cherche la solution sous la forme d'un développement en série
$$u(x,t) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \alpha_k u_k(x,t).$$
Calculer les coefficients complexes α_k en fonction de u_0. On réalisera le calcul formellement sans chercher à justifier les convergences des séries.
4. En tronquant le développement en série précédent (en faisant varier k de -30 à 30, par exemple), calculer numériquement la solution de (1), (2), (3). Programmer et comparer aux résultats de la partie I. Commenter.
Nota : en fortran, les complexes sont déclarés avec le mot-clé `complex*16`. Pour initialiser un complexe $z = a + ib$ on écrit
`z=(a,b)`
On peut retrouver la partie réelle et la partie imaginaire avec $a =$`real(z)` et $b =$`aimag(z)`.