

Solution de l'équation de Poisson sur un carré

Soit le carré $\Omega =]0, 1[\times]0, 1[$ et f une fonction définie sur ce carré. On considère la solution $u(x, y)$ de l'équation de Poisson avec conditions aux limites de Dirichlet

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f, & (x, y) \in \Omega, \\ u(x, y) &= 0, & (x, y) \in \partial\Omega. \end{aligned} \tag{1}$$

I) Différences finies

1. Écrire un schéma de différences finies sur une grille de taille $N \times N$. On choisira comme pas de discrétisation $\Delta x = 1/(N + 1)$. Expliquer comment vous numérotez les inconnues sur la grille. Montrer que ce schéma se ramène à la résolution d'un système linéaire

$$AU = F. \tag{2}$$

2. Expliciter en détail le calcul de la matrice du système linéaire et du second membre dans le cas où $N = 3$. Vérifier qu'il s'agit d'une matrice pentadiagonale.
3. Calculer le nombre de termes non nuls de la matrice. Calculer ensuite le nombre de termes de la matrice compris entre la diagonale et la diagonale extrême supérieure.

II) Résolution du système linéaire

1. Écrire un sous-programme qui calcule la matrice A stockée sous forme morse. Les entrées de ce sous-programme sont : **n** (taille de la matrice), **nnzmax** (un majorant du nombre de valeurs non nulles). Les sorties sont : **nnz** (le nombre effectif de valeurs non nulles) et les tableaux **indi(1:nnzmax)**, **indj(nnzmax)**, **val(nnzmax)** qui contiennent les indices et les valeurs non nulles de la matrice.
2. Écrire un sous-programme qui convertit une matrice stockée morse en une matrice stockée ligne de ciel (sky-line). Les entrées de ce sous-programme sont : toutes les entrées et sorties de la question 1 ainsi que **nskymax** un majorant du nombre de valeurs stockées dans les tableaux **vsup(1:nskymax)** et **vinf(1:nskymax)**. Les sorties sont **nsky** (taille effective de **vsup** et **vinf**), **vdiag** (diagonale de A), **vsup** et **vinf** (stockage des parties supérieures et inférieures de A), **kld** (tableau de repérage des débuts de colonnes).
3. Résoudre le système linéaire (2) au moyen du sous-programme fourni (**sol.f90**). Tracer la solution en 3D avec gnuplot pour diverses valeurs de la force f .