

M2 CSMI EDP hyperboliques TP

Durée 2h.

Compte-rendu à rendre sur feuille à la fin de la séance. Vous pouvez travailler à deux, mais il faut rendre un compte-rendu par personne. Ne pas recopier les programmes entiers, seulement les parties intéressantes. Reproduire à la main l'allure des courbes observées avec gnuplot.

Résolution numérique du système de Saint-Venant

1. Programmer un solveur de Riemann exact pour les équations de Saint-Venant. Décrire très rapidement la méthode de résolution.
2. Calculer numériquement la solution du problème de Riemann pour le modèle de Saint-Venant

$$\begin{aligned}\partial_t w + \partial_x f(w) &= 0 \\ w &= (h, hu) \\ f(w) &= (hu, hu^2 + gh^2/2) \quad , \quad g = 9.81 m/s^2 \\ u(x, 0) &= 0 \\ h(x, 0) &= \begin{cases} h_L = 2 & \text{si } x < 0, \\ h_R = 1 & \text{si } x > 0. \end{cases}\end{aligned}$$

Tracer la hauteur d'eau et la vitesse en fonction de x à l'instant $t = 1$. Décrire rapidement le type d'ondes observées.

3. Programmer le schéma de Godunov. Décrire la méthode de programmation. Vérifier votre programmation au moyen du cas test ci-dessus.
4. On considère un bassin $[-10, 10]$ fermé. Le bassin est séparé en deux parties égales grâce à une paroi situé en $x = 0$. à l'instant $t = 0$, la partie gauche (respt. droite) est remplie avec de l'eau immobile à une hauteur h_L (respt. h_R). à l'instant $t = 0$, on retire la paroi. Ecrire et justifier la condition aux limites que vous devez imposer en $x = -10$ et $x = 10$. Que devient cette condition si le bassin est infini ?
5. Calculer l'évolution de la surface d'eau au cours du temps. On représentera h et u à divers instants pour diverses finesses de maillage. Comparer avec la solution exacte du problème de Riemann et expliquer pourquoi les deux solutions diffèrent à partir d'un certain instant que l'on calculera.
6. Lorsque $t \rightarrow \infty$, on peut montrer que $w(x, t)$ tend vers un vecteur constant w_∞ . Calculer ce vecteur.
7. Vérifier numériquement ce calcul.
8. Refaire l'étude numérique en utilisant le flux numérique de Rusanov (voir <http://www-irma.u-strasbg.fr/~helluy/PHYP/phyp.pdf>).