M2 CSSI EDP hyperboliques TP3

S1

Résolution numérique du système de Saint-Venant en deux dimensions

On considère une carte géographique modélisée par une fonction A définie sur le carré $[0, L] \times [0, L]$. La quantité $A(x, y)$ désigne l'altitude du point (x, y). De l'eau peut s'écouler sur cette topographie. La surface de l'eau se trouve à l'altitude $A(x, y)+h(x, y, t)$. La hauteur d'eau $h \geq 0$ étant petite devant L, le champ de vitesse est quasi-horizontal et constant suivant z. La vitesse est entièrement déterminée par ses composantes suivant x et y $u(x, y, t)$ et $v(x, y, t)$. Par convention, on convient que la vitesse est nulle sur une zone sèche, c'est à dire aux points (x, y, t) où $h(x, y, t) = 0$. Dans ce cadre, le modèle de Saint-Venant (ou shallow water) s'écrit

$$\begin{aligned}
\partial_t h + \partial_x(hu) + \partial_y(hv) &= 0, \\
\partial_t(hu) + \partial_x(hu^2 + gh^2/2) + \partial_y(huv) &= -gh\partial_x A \\
\partial_t(hv) + \partial_x(huv) + \partial_y(hv^2 + gh^2/2) &= -gh\partial_y A
\end{aligned}$$

1. écrire le système de Saint-Venant 2D sous la forme

$$\partial_t w + \partial_x f_1(w) + \partial_y f_2(w) = S(w)$$

2. Pour un vecteur $n = (n_1, n_2)$. Le flux est défini par $f(w) \cdot n = f_1(w)n_1 + f_2(w)n_2$. Le système est dit hyperbolique si $\partial_w f(w) \cdot n$ est diagonalisable avec des valeurs propres réelles pour tout w tel que $w_1 \geq 0$ et pour tout n. Vérifier que le système de Saint-Venant 2D est hyperbolique.

3. On souhaite réaliser une approximation numérique du système de Saint-Venant au moyen de la méthode des volumes finis. Donner l'expression du flux numérique $f(w_L, w_R, n)$ de Rusanov en 2D.

4. Décrire comment utiliser le solveur de Riemann 1D pour l'adapter aux calcul en 2D.

5. Décrire l'implémentation des conditions aux limites suivantes: miroir, valeurs imposées, zone sèche.

6. En modifiant le programme fourni, mettre en oeuvre la résolution du sytème de Saint-Venant sur un maillage volume fini régulier. Vérifier la validité de votre programmation en calculant d'abord des solutions de problème de Riemann dans la direction x puis la direction y avec un fond plat ($A = cste$)

7. Tester votre programme sur un cas 2D avec un fond plat.

8. Décrire et programmer la méthode MUSCL en 2D. Vérifier que la précision est améliorée.

9. **Facultatif**: Lorsque le fond est variable, on suppose connu dans chaque cellule L une approximation de la hauteur A_L. Les valeurs de l'altitude dans les autres cellules R le long de ∂L sont notées A_R. La notation n_{LR} désigne le vecteur normal à ∂L orienté de L vers R. Le flux numérique est obtenu en remplaçant le flux habituel de Rusanov par la quantité suivante

$$g(w_L, w_R, n) = f(w_L^*, w_R^*, n_{LR}) + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{g}{2}(h_L^2 - h_L^{*2})n \end{pmatrix},$$

$$A^* = \max(A_L, A_R),$$

$$h_L^* = \max(0, h_L + A_L - A^*), \quad h_R^* = \max(0, h_R + A_R - A^*),$$

$$u_L^* = \begin{cases} (h_L u_L)/h_L \text{ si } h_L > 0, \\ 0 \text{ si } h_L = 0. \end{cases} \quad u_R^* = \begin{cases} (h_R u_R)/h_R \text{ si } h_R > 0, \\ 0 \text{ si } h_R = 0. \end{cases}$$

Vérifier que le flux n'est plus conservatif. Vérifier que le schéma est consistant avec le modèle de Saint-Venant. Décrire les modifications à apporter à votre code pour traiter un fond quelconque.

10. Tester votre programme sur un cas réaliste avec fond non plat.