

Calcul des valeurs propres d'une matrice

March 2, 2023

1 Méthode de la puissance itérée

Soit A une matrice $n \times n$ complexe. On suppose que A est diagonalisable avec les valeurs propres λ_i , $i = 1 \dots n$ (pas forcément distinctes) associées aux vecteurs propres e_i . On suppose que

$$\forall i \in \{2 \dots n\}, \quad |\lambda_1| > |\lambda_i|.$$

On se donne $x_0 \in \mathbb{C}^n$ et on considère

$$x_{k+1} = \frac{Ax_k}{\|Ax_k\|}.$$

Montrer que

1. Montrez qu'asymptotiquement, x_k est colinéaire à e_1 et que $(Ax_k)_j / (x_k)_j \rightarrow \lambda_1$. Donner des énoncés précis.
2. Cas particuliers: A symétrique, $\lambda_1 > 0$?
3. Comment calculer la valeur propre de plus petit module ?
4. Comment calculer la valeur propre la plus proche d'un complexe σ donné ?
5. On connaît une valeur propre λ . Comment calculer numériquement et efficacement un vecteur propre correspondant ?
6. Programmer les différents algorithmes en Python/NumPy. Tester sur des matrices choisies aléatoirement.

2 Méthode QR

Soit A une matrice $n \times n$. On pose $A_1 = A$. On suppose connue A_k . On calcule la décomposition QR de A_k :

$$A_k = Q_k R_k$$

avec Q_k matrice orthogonale et R_k matrice triangulaire inférieure. On pose ensuite

$$A_{k+1} = R_k Q_k.$$

1. Montrer que si le vecteur formé de la diagonale de R_k tend vers un vecteur, alors ce vecteur contient les valeurs propres de A .
2. Programmer la méthode QR en Python/numpy. La tester sur plusieurs matrices symétriques ou non.