

# Calcul des valeurs propres d'une matrice

March 2, 2023

## 1 Méthode de la puissance itérée

Soit  $A$  une matrice  $n \times n$  complexe. On suppose que  $A$  est diagonalisable avec les valeurs propres  $\lambda_i$ ,  $i = 1 \dots n$  (pas forcément distinctes) associées aux vecteurs propres  $e_i$ . On suppose que

$$\forall i \in \{2 \dots n\}, \quad |\lambda_1| > |\lambda_i|.$$

On se donne  $x_0 \in \mathbb{C}^n$  et on considère

$$x_{k+1} = \frac{Ax_k}{\|Ax_k\|}.$$

Montrer que

1. Montrez qu'asymptotiquement,  $x_k$  est colinéaire à  $e_1$  et que  $(Ax_k)_j / (x_k)_j \rightarrow \lambda_1$ . Donner des énoncés précis.
2. Cas particuliers:  $A$  symétrique,  $\lambda_1 > 0$  ?
3. Comment calculer la valeur propre de plus petit module ?
4. Comment calculer la valeur propre la plus proche d'un complexe  $\sigma$  donné ?
5. On connaît une valeur propre  $\lambda$ . Comment calculer numériquement et efficacement un vecteur propre correspondant ?
6. Programmer les différents algorithmes en Python/NumPy. Tester sur des matrices choisies aléatoirement.

## 2 Méthode QR

Soit  $A$  une matrice  $n \times n$ . On pose  $A_1 = A$ . On suppose connue  $A_k$ . On calcule la décomposition  $QR$  de  $A_k$ :

$$A_k = Q_k R_k$$

avec  $Q_k$  matrice orthogonale et  $R_k$  matrice triangulaire inférieure. On pose ensuite

$$A_{k+1} = R_k Q_k.$$

1. Montrer que si le vecteur formé de la diagonale de  $R_k$  tend vers un vecteur, alors ce vecteur contient les valeurs propres de  $A$ .
2. Programmer la méthode QR en Python/numpy. La tester sur plusieurs matrices symétriques ou non.