# Calcul des valeurs propres d'une matrice

Philippe Helluy

2 mars 2023

Dans la suite, $A$ désigne une matrice symétrique définie positive. Nous notons $\lambda_i$ les valeurs propres de $A$ et nous supposons que

$$\lambda_1 > \cdots > \lambda_N > 0.$$

Le but de ce problème est de construire un algorithme pour calculer les valeurs propres et les vecteurs propres de $A$. Les deux parties sont indépendantes.

**Partie I** : cas tridiagonal

Dans cette partie, nous supposons de plus que $A$ est une matrice tridiagonale de la forme

$$A = \begin{bmatrix} d_1 & u_1 & & \\ u_1 & d_2 & & \\ & & \ddots & u_{N-1} \\ & & u_{N-1} & d_N \end{bmatrix}$$

1. Montrer que $\forall i,\ d_i > 0$.
2. Montrer l'on peut toujours se ramener au cas où tous les $u_i$ sont non nuls. Dans la suite nous supposons donc
$$\forall i \geq 1, \quad u_i \neq 0.$$
3. Soit la suite de polynômes $P_i$ définie par
$$P_0 = 1, \quad P_1 = d_1 - \lambda, \quad P_i = (d_i - \lambda)P_{i-1} - u_{i-1}^2 P_{i-2}, \quad i = 2 \cdots N.$$
Montrer que $P_N$ est le polynôme caractéristique de $A$.
4. Montrer que $P(0) > 0$.
5. Soit $\lambda$ une valeur propre de $A$. En utilisant le théorème de Gerschgorin, montrer que
$$\lambda \leq \max_i d_i + 2 \max_i |u_i|$$
.
6. Soit $\lambda$ une racine de $P_i$, $1 \leq i \leq N-1$. Montrer que $P_{i-1}(\lambda)P_{i+1}(\lambda) < 0$.
7. $\lambda_1^{(1)} = d_1$ est l'unique racine de $P_1$. Montrer que $P_2$ a deux racines réelles distinctes $\lambda_1^{(2)}$ et $\lambda_2^{(2)}$ telles que
$$\lambda_1^{(2)} > \lambda_1^{(1)} > \lambda_2^{(2)} > 0.$$
8. Montrer, par récurrence, que pour $i = 1 \cdots N-1$, $P_i$ possède $i$ racines réelles distinctes strictement positives qui séparent les $i+1$ racines de $P_{i+1}$.
9. Soit $a$ un réel et $V_a$ l'ensemble défini par
$$V_a = \{i, 1 \leq i \leq N, P_{i-1}(a) \cdot P_i(a) < 0\}.$$
Soit aussi
$$\sigma(a) = \mathrm{card} V_a.$$
En d'autres termes, $\sigma(a)$ compte le nombre de changements de signes dans la suite $P_0(a)$, $P_1(a)$, $\cdots P_N(a)$. Montrer que $\sigma(a)$ est le nombre de racines de $P_N$ qui sont inférieures ou égales à $a$ (théorème de Sturm).
10. Écrire une fonction Python, `sigma(N,a,d,u)` qui calcule $\sigma(a)$ à partir de $a$ et des tableaux `d(0:N)` et `u(0:N-1)`.

11. Pour calculer $\lambda_i$, nous considérons l'algorithme suivant. L'initialisation est définie par

$$a_0 = 0, \quad b_0 = \max_i d_i + 2 \max_i |u_i| \, .$$

Ensuite, nous calculons

$$c_n = \frac{a_n + b_n}{2},$$

puis, si $\sigma(c_n) \geq i$ alors nous prenons $a_{n+1} = c_n$, $b_{n+1} = b_n$. Si $\sigma(c_n) < i$ nous prenons $a_{n+1} = a_n$, $b_{n+1} = c_n$. Montrer que les suites $(a_n)$ et $(b_n)$ tendent vers $\lambda_i$.

12. Écrire une fonction Fortran `lambda(N,i,d,u)` pour calculer $\lambda_i$ à partir de $i$ et des tableaux `d(0:N)` et `u(0:N-1)` avec une précision de $\varepsilon = 10^{-8}$.

13. Une fois connue $\lambda_i$, comment calcule-t-on un vecteur propre associé ?

**Partie II** : cas général

Dans cette partie, $A$ est une matrice symétrique définie positive mais n'est plus forcément tridiagonale. Pour les calculs et la rédaction, on pourra prendre $N = 4$.

On note $A_i$ les vecteurs colonnes de $A$ et $\overline{A}_i$ les vecteurs colonnes de $A$ dont on a retiré la première composante. Soit $\overline{u}_2$ un vecteur unitaire $\mathbb{R}^{N-1}$ et $\overline{Q}_2 = I_{N-1} - 2\overline{u}_2\overline{u}_2^T$ (appelée matrice de réflexion de Householder). On note aussi $u_2 = (0, u_2^T)^T$ $Q_2 = I_N - 2u_2u_2^T$.

1. Montrer que $\overline{Q}_2$ est symétrique et unitaire.
2. Soit $\overline{e}_1$ le premier vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^{N-1}$, $\overline{e}_1 = (1, 0 \cdots 0)^T$. On pose $\overline{v}_2 = \overline{A}_1 + \left\|\overline{A}_1\right\| \overline{e}_1$. Calculer la norme euclidienne de $\overline{v}_2$, $r = \|\overline{v}_2\|$ en fonction de $\left\|\overline{A}_1\right\|$ et de la première composante $\overline{A}_{1,1}$ de $\overline{A}_1$.
3. Montrer que si $\overline{u}_2 = \overline{v}_2/r$ alors la première colonne de $Q_2A$ contient des zéros, sauf sur ses deux premières composantes.
4. En déduire que la première colonne de $Q_2AQ_2^T$ contient des zéros, sauf sur ses deux premières composantes.
5. En déduire un algorithme pour construire une matrice $Q$ unitaire telle que

$$A = Q^T H Q$$

où $H$ est une matrice de Hessenberg supérieure, c'est à dire qui vérifie

$$i > j + 1 \Rightarrow H_{ij} = 0.$$

6. Écrire une fonction Python `house(N,A,Q,H)` qui calcule les matrices $Q$ et $H$ à partir de $A$.
7. Montrer que $H$ est symétrique, puis que $H$ est tridiagonale.
8. Déduire de ce qui précède un algorithme pour calculer les valeurs propres et vecteurs propres d'une matrice symétrique définie positive $A$.