

Contrôle optimal TP1

S1

Algorithme d'Uzawa

1. Soit J une application strictement convexe de R^n à valeurs dans R convexe et sci. Soient g_k de R^n dans R , des fonctions convexes sci, $k = 1 \cdots p < n$. L'ensemble des contraintes est défini par $C = \{u \in R^n, \forall k, g_k(u) \leq 0\}$. Décrire l'algorithme du gradient projeté pour résoudre le problème d'optimisation: trouver $u \in C$

$$J(u) = \inf_{v \in C} J(v). \quad (1)$$

Pourquoi cet algorithme est-il difficile à mettre en oeuvre ?

2. Soit λ un vecteur de R^p et le lagrangien

$$L(u, \lambda) = J(u) + \sum_k \lambda_k g_k(u).$$

Montrer que le problème (1) est équivalent à

$$J(u) = \inf_{v \in R^n} \sup_{\lambda \geq 0} L(v, \lambda).$$

3. On admet que l'on est dans un cas où

$$J(u) = \sup_{\lambda \geq 0} \inf_{v \in R^n} L(v, \lambda).$$

En quoi cette propriété est-elle intéressante sur le plan numérique ? décrire l'algorithme d'Uzawa.

4. On se place maintenant dans le cas

$$J(u) = \int_{x=0}^L \left(\frac{1}{2} u'(x)^2 - f(x)u(x) \right) dx.$$

Les contraintes sont $u(0) = u(L) = 0$ et $\forall x \in [0, L], u(x) \leq h(x)$. Les fonctions f et g sont données et supposées continues. g est supposée > 0 . Quelle est l'interprétation physique de ce problème ?

5. On introduit le lagrangien $L(u, \lambda) = \int_{x=0}^L \left(\frac{1}{2} u'(x)^2 - f(x)u(x) + \lambda(x)(u(x) - h(x)) \right) dx$. Montrer que, formellement, si $J(u) = L(u, \lambda) = \inf_v \sup_{\mu \geq 0} L(v, \mu)$ alors u est solution du problème aux limites

$$\begin{aligned} -u'' &= f - \lambda \\ \lambda &\geq 0 \\ u &\leq h \\ \lambda(u - h) &= 0 \\ u(0) = u(L) &= 0. \end{aligned}$$

Quelle est l'interprétation physique du multiplicateur de Lagrange λ ?

6. Programmer l'algorithme d'Uzawa pour le problème (1) lorsque la fonction J et les contraintes sont celles de la question 4 et que la fonction u appartient à un espace d'éléments finis que l'on décrira rapidement.
7. Programmer et tester cet algorithme pour diverses forces f et diverses formes du mur h . Comment choisissez-vous le paramètre ρ dans l'algorithme d'Uzawa ?