Contrôle optimal TP2

S1

Contrôle de l'équation de la chaleur

1. On considère le problème suivant

$$\begin{array}{rcl} \partial_t y - \partial_{xx} y & = & 0, \quad x \in [0, L], \quad t \in [0, T] \\ y(x, 0) & = & 0, \quad x \in [0, L], \\ y(0, t) & = & 0, \quad t \in [0, T], \\ \partial_x y(L, t) & = & u(t), \quad t \in [0, T]. \end{array}$$

   Montrer que l'application qui à u associe $y = y(u)$ est linéaire.

2. Soit la fonction coût

$$J(u) = \int_{t, x=L} \frac{1}{2} \left(y(u)(L, t) - z_d(t) \right)^2 dt + \frac{\varepsilon}{2} \int_t u(t)^2 dt.$$

   Calculer la dérivée directionnelle $J'(u, \varphi)$ de J.

3. En introduisant une équation adjointe bien choisie montrer que vous pouvez mettre la dérivée directionnelle de J sous la forme

$$J'(u, \varphi) = \int_{t, x=L} w \varphi.$$

   En déduire le gradient w de J.

4. Décrire et mettre en oeuvre une méthode numérique de résolution de l'équation de la chaleur par une méthode d'éléments finis en espace et une intégration d'Euler implicite en temps. Vérifier sur des exemples simples que cette méthode fonctionne.

5. Comment calculez-vous numériquement le gradient de J ?

6. En déduire un algorithme pour calculer numériquement le contrôle optimal u. Le programmer.

7. Tester cet algorithme pour diverses valeurs de ε, T et z_d. Commentez vos résultats (comparer les courbes $u(t)$, $y(L, t)$ et $z_d(t)$ à convergence de la méthode par exemple). Comment choisissez-vous le paramètre ρ dans la méthode de gradient ? de combien d'itérations avez-vous besoin ?