

Contrôle optimal: TP3

S1

Contrôle optimal de l'équation de Laplace

1. Soit $y(u)$ la solution du problème suivant (Ω est un ouvert régulier et $\partial\Omega = \Gamma_d \cup \Gamma_n$)

$$-\Delta y = f \text{ dans } \Omega,$$

$$y = y_0 \text{ sur } \Gamma_d,$$

$$\frac{\partial y}{\partial n} = u \text{ sur } \Gamma_n.$$

Soit la fonctionnelle (ε est un réel > 0)

$$J(u) = \int_{\Omega} \frac{1}{2} (y(u) - y_d)^2 + \varepsilon \int_{\Gamma_n} \frac{1}{2} u^2.$$

On souhaite trouver le contrôle optimal u qui minimise $J(u)$. Donner une interprétation physique à ce problème.

2. En introduisant un état adjoint p bien choisi, calculer le gradient de J .
3. Introduire, en le justifiant, un algorithme itératif de gradient de paramètre $\rho > 0$ pour résoudre le problème d'optimisation.
4. Décrire la programmation de cet algorithme dans freeFEM++. On note h la finesse du maillage.
5. Montrer sur divers exemples l'intérêt de cet algorithme. On étudiera soigneusement l'influence des paramètres ρ , ε et h sur la convergence de l'algorithme. Commenter les résultats obtenus.